「線形代数学 A」試験解答例　2014. 8. 1

1. 空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 点 $A(1,2,1)$, $B(-1,1,2)$, $C(1,-1,2)$ を考える．

(1) A, B, C を通る平面 H の方程式を求めよ．

(2) 平面 H と xy 平面のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ．

解. (1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ より，外積は $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ となる．従って法線ベクトルとして $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ がとれ，H は点 A を通るので，方程式は $(x-1)+(y-2)+3(z-1)=0$. つまり $x+y+3z=6$ となる．

(2) 上記の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と xy 平面の法線ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のなす角を φ とすると $\theta = \varphi$ または $\theta = \pi - \varphi$ である．$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{11}} > 0$ より，$\theta = \varphi$ となるので $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{11}}$.

(3) $S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{11}$.

(4) $V = \dfrac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right| = 2.$ □

2. a, b は定数として $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = A - E$ とおく．

(1) A は正則であり，N は非正則であることを示せ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(3) N^n $(n \geq 1)$ を求めよ．(E は単位行列である．)

(4) A^n $(n \geq 1)$ を求めよ．

解. (1) $|A| = 1 \neq 0$ より A は正則. $|N| = 0$ より N は非正則.

(2) 掃き出し法により，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^n = O$ $(n \geq 3)$.

(4) E, N は可換であるので 2 項定理より，$A^n = (E+N)^n = E + {}_nC_1 N + {}_nC_2 N^2 = \begin{pmatrix} 1 & na & \frac{n(n-1)}{2}ab \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

3. 次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

(3) $I_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

(n 次, $n \geq 2$)

解. (1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a+2)(a-1)^2.$

(2) 2 行から 1 行を引き，4 行から 3 行を引くと $I = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

同じベクトルが出てきたら行列式は0

(3) 第 1 列で展開して

$I_n = (x^2+1)I_{n-1}$

$-x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$ となる．さらに第 2 項を第 1 列で展開すると，漸化式

$$I_n = (x^2+1)I_{n-1} - x^2 I_{n-2}$$

を得る．$I_2 = x^4 + x^2 + 1$, $I_3 = x^6 + x^4 + \cdots + 1$ と帰納法により $I_n = x^{2n} + x^{2(n-1)} + \cdots + x^2 + 1$ となる． □

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & a \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ ab \end{pmatrix}$ (a, b は実数) とし，連立 1 次方程式 $(E): A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．

(1) (E) が解をもつための a, b の条件を求めよ．

(2) (E) が解をもち，$\operatorname{rank} A = 3$ であるとき，a, b を求めよ．

(3) (2) の場合に (E) の解のベクトル表示を求めよ．

解. (1) $a \neq 4$　または　$a = 4$ かつ $b = 1$.

(2) $a = 4$, $b = 1$.

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ □