# 中心力場での運動

http://www.kusastro.kyoto-u.ac.jp/~iwamuro/LECTURE/KIN/

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E$$

を極座標で表すと、

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)^2 + U = E$$

$\left\{ \begin{array}{l} v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta \\ v^2 = v\,v \\ \quad = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \\ L = mr^2\dot{\theta} \end{array} \right.$

$L = mr^2\dot{\theta}$ で $\dot{\theta}$ を消去、$U = k/r$ として、

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{遠心ポテンシャル}} + \frac{k}{r} = E$$

$\left[ \begin{array}{l} \text{万有引力} \quad k = -GMm \\ \text{電気力} \quad k = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \end{array} \right.$

(第 2 項：遠心ポテンシャル) $u = 1/r$ とおくと、

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

これで時間微分を $\theta$ についての微分に変換できる。

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 + ku = E$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - u^2 - \frac{2km}{L^2}u$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2mE}{L^2} + \frac{k^2m^2}{L^4}\right)}_{A^2} - \left(\underbrace{u + \frac{km}{L^2}}_{\tilde{u}}\right)^2$$

第一括弧を $A^2$、第二括弧の中を $\tilde{u}$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\theta} = \pm\sqrt{A^2 - \tilde{u}^2}$$

$\tilde{u} = A\cos\varphi$ とおくと、

$\tilde{u} = A\cos\varphi$ を代入

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\theta} = -A\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = \pm A\sin\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\theta + C$$

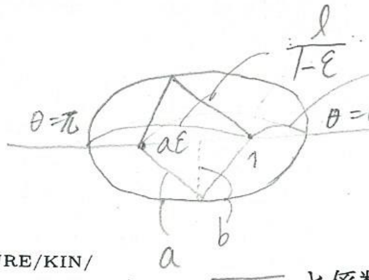
$C = 0$ とすると、結局、$\tilde{u} = A\cos\theta$ となり、

$$u + \frac{km}{L^2} = \pm\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{k^2m^2}{L^4}}\cos\theta$$

2 次曲線の極座標表示

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

$u - \frac{1}{\ell}$ $\qquad$ $\frac{\varepsilon}{\ell}\cos\theta$




$a = \frac{l}{1-\varepsilon} + \frac{l}{1+\varepsilon}$

(双曲線では $\varepsilon > 1$ より絶対値付く)

$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

$$u - \frac{1}{\ell} = \frac{\varepsilon}{\ell}\cos\theta$$

と係数比較して (復号は $\varepsilon \geqq 0$ となる方を選択)

$$\ell = -\frac{L^2}{km} \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{2L^2E}{k^2m} + 1}$$

を得る。また、2 次曲線の性質より、

$$a = \left|\frac{\ell}{1 - \varepsilon^2}\right| = \left|\frac{k}{2E}\right|$$

$$b = a\sqrt{|1 - \varepsilon^2|} = \sqrt{\frac{L^2}{2m|E|}} = \sqrt{\frac{aL^2}{|k|m}}$$

となる。$a$ は $E$ のみで、$b$ は $L, E$ で決まる。
軌跡が楕円になる場合 ($E < 0$ の場合)、周期を $T$ とすると、面積速度は

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m} \; (= \frac{1}{2}r^2\dot{\theta})$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2 m} \; (= \frac{GM}{4\pi^2})$$

これはケプラーの第三法則である。
また、軌跡が双曲線になる場合 ($\varepsilon > 1$ すなわち $E > 0$ の場合)、散乱角を $\Theta$ とすると、

$$\tan\frac{\Theta}{2} = \frac{a}{b} = \frac{|k|}{2Eb}$$

$$b = \frac{|k|}{2E}\frac{1}{\tan(\Theta/2)}$$

両辺を微分して、

$$\mathrm{d}b = -\frac{|k|}{4E}\frac{1 + \tan^2(\Theta/2)}{\tan^2(\Theta/2)}\mathrm{d}\Theta$$

$$= -\frac{|k|}{4E}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\sin^2(\Theta/2)}$$

微分断面積 $\mathrm{d}\sigma$ は、

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi b|\mathrm{d}b| = \frac{\pi k^2}{4E^2}\frac{\cos(\Theta/2)\mathrm{d}\Theta}{\sin^3(\Theta/2)}$$

$$= \frac{k^2}{16E^2}\frac{2\pi\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta}{\sin^4(\Theta/2)}$$

$$= \frac{k^2}{(4E)^2}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\sin^4(\Theta/2)}$$

これをラザフォード散乱の微分断面積と呼ぶ。