16 900

(2) Aを対角化する。$P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$とおくと、$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$で、

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\qquad P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$$

よって、

$$A^n=P\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2^{n+1} & 3^n\\ 2^n & -3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n & 2^{n+1}-2\cdot 3^n\\ -2^n+3^n & -2^n+2\cdot 3^n\end{pmatrix}.$$

10.(1) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1 & -1\\ 1 & t-3\end{vmatrix}=(t-1)(t-3)+1=(t-2)^2$

$t=2$のとき、

$$\begin{array}{cc}1 & -1\\ 1 & -1\\ \hline 1 & -1\\ 0 & 0\end{array}$$

つまり、$x_1=x_2$　$x_1=a$とすると、

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

よって、固有空間の基底は1つ

固有値の重複度と基底の数が等しくないので、対角化不可能。

(2) $N=A-2E$とおいて、$N\boldsymbol{u}\neq 0$となる$\boldsymbol{u}$として、$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$とする。

このとき、$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$とする。このとき、

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

正規直交分布を利用した三角化

$t=2$のときの固有空間の基底を$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$として、

$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$とする。この$\boldsymbol{u}_1$に垂直で大きさ1のベクトルとして、$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{u}_2$として設定する。

これより、$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$を設定すると、

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -4\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$(t-1)$

$(t-1)^2-1$

$(t-1)(t-2)=0$

$0, 1, 2$

$=0$

よって、$t=a$のとき

Cとすると

よって、固有空間の基底が…
対角化不可能

$(t-3)$　$t=2, 3$

aとすると、

aとすると

No.

Date

11. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $|tE-A| = \begin{vmatrix} t-1 & -3 \\ -3 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 - 9 = t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2) = 0$

$t = 4, -2$

$\lambda = 4$のとき、

$\begin{array}{cc} 3 & -3 \\ -3 & 3 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}$

つまり、$x_1 - x_2 = 0$。$x_1 = a$とおくと、

よって、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

$\lambda = -2$のとき、

$\begin{array}{cc} -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$

つまり、$x_1 + x_2 = 0$ $x_1 = a$と表す、

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 4$のときの固有空間の基底を $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = -2$のとき、のときの固有空間の基底を $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする。

このとき、$\frac{v_1}{|v_1|} = u_1$、$\frac{v_2}{|v_2|} = u_2$ を作り、u_1とu_2は正規直交基底である。

これより、直交行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ を作る。これを用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$とする。

$$|tE-A| = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & -1 \\ 1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3 + 1 + 1 - \{(t-1) + (t-1) + (t-1)\}$$

$= (t-1)^3 + 2 - 3(t-1)$

$= t^3 - 3t^2 + 3t - 1 + 2 - 3t + 3$

$= t^3 - 3t^2 + 4 = (t-2)(4-t^2)$

$= -(t-2)^2(t+1)$

$(t-2)^2(t+2) = 0$より、$t = \pm 2$。

$t = 2$のとき

$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$

よって、$x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$x_1 = a$, $x_2 = b$ とすると、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有空間の基底として $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$、$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

$t = -1$のとき、

$\begin{array}{ccc} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}$

$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$

これより、$x_1 - x_2 = 0$

$-x_2 - x_3 = 0$

$x_2 = c$ とおくと、

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

つまり、固有空間の基底 $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

v_1, v_2, v_3 を正規直交化する。$u_1' = \frac{v_1}{|v_1|}$ とおいて、$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$u_2' = v_2 - (v_2, u_1)u_1$

$= \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

よって、$u_2 = \frac{u_2'}{|u_2'|} = \frac{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

また、$u_3' = v_3 - (v_3, u_1)u_1 - (v_3, u_2)u_2$

$= \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

よって、$u_3 = \frac{u_3'}{|u_3'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

これを用いて、直交行列を $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ -1 & 2 & 1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3}\\ -2 & 4 & 2\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix} =$$

12 (1) n次正方行列において、$|tE-A| = \phi_A(t)$ とすると、$\phi_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$

ただし、$\lambda_1 \sim \lambda_n$ は重複も含めて表される。ここで、$t=0$ を代入すると、$\phi_A(0) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

また、$t=0$ のとき、$\phi_A(0) = |A|$ であり、正則行列 A は $|A| \neq 0$。よって、$\lambda \neq 0$。

(2) $Av = \lambda v$ より、$\frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$ つまり、A^{-1} の固有値は $1/\lambda$