No.

Date

5(1) $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ の逆行列をもとめる.

$AB=E$ となる B をもとめる.

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

掃き出し法を用いて解くと,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

よって, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(2) $\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(z-y)^2+\frac{1}{2}(x+z)^2-2=0$ と表現できる. また, $f(x)=Ax$ より

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y+z\\ -x-z\\ x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$$

よって, $f(S)$ は $\frac{1}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2+\frac{1}{2}z'^2=2$

$x'^2+y'^2+z'^2=4$

(3) このとき, $f(S)$ でかこまれる体積は $\frac{32}{3}\pi$.

しかし, f によって, $|A|=2$倍 されているので, S の体積は $\frac{16}{3}\pi$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \text{ を考える}$$

6 (1) $H: ax + y + z = 0$ のベクトル表示を一つ求めよ。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y-ax \end{pmatrix}$$

$x = s,\ y = t$ とおいて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$f(\boldsymbol{x}) = s f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + t f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= s\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= s\begin{pmatrix} 3+3a \\ -3-3a \\ -2-2a \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、$\begin{pmatrix} 3+3a \\ -3-3a \\ -2-2a \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ が一次従属なら、$f(\boldsymbol{x})$ は直線を表す。

つまり、$a = -1$

7. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を行列 $D = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ となって、$|D| = 2 \neq 0$ より、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は共に1次独立。

同様に、$D_2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ をつくると、$|D_2| = -1 \neq 0$ で、1次独立。

また、次元と同じ数だけ1次独立なベクトルがあるので、$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = B$, $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = C$ はそれぞれ $\mathbb{R}^3$ の基底

No.

Date

16/900

(2) BからCへの基底の変換行列をもとめよ。

$\mathbb{u} = \frac{1}{2}\mathbb{a} + \frac{1}{2}\mathbb{b} - \frac{1}{2}\mathbb{c}$

$\mathbb{v} = \mathbb{a} \quad - \mathbb{c}$

$\mathbb{w} = \frac{3}{2}\mathbb{a} - \frac{1}{2}\mathbb{b} - \frac{1}{2}\mathbb{c}$

よって、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって、変換行列は

8. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $|tE-A| = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3 - (t-1) = (t-1)\{(t-1)^2 - 1\} = t(t-1)(t-2) = 0$

より、$t = 0, 1, 2$

ここで、3個の異なる固有値をもったから対角化可能。

(2) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ $|tE-A| = \begin{vmatrix} t-a & -1 & 0 \\ 0 & t-a & 0 \\ 0 & -1 & t-a \end{vmatrix} = (t-a)^3 = 0$

よって、$t=a$ のとき

$t=a$ のとき、$aE-A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(aE-A)x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　$x_2 = 0$　$x_1 = b$,　$x_3 = c$ とすると、

$x = b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ よって、固有空間の基底を2つもつ 対角化不能

9 (1) $|tE-A| = \begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ -1 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)(t-4) + 2 = t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$　$t = 2, 3$

$\lambda = 2$ のとき、$\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}$　つまり、$x_1 + 2x_2 = 0$　$x_1 = -2x_2$　$x_2 = a$ とすると、

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$　よって、固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ のとき、$\begin{matrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$　つまり、$x_1 + x_2 = 0$　$x_1 = -x_2$　$x_1 = a$ とすると

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　よって、固有空間の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$