ベクトル空間の定義　まとめ＜ほぼ教科書の写し＞

① 空でない集合Ｖに和 $v+w$ が定義され、スカラー倍 αv も定義される。
このとき、ｖ、ｗはそれぞれベクトルを示し、Ｖに含まれているとする。
また、αはスカラーである

② $v+w$、αv の演算の結果がそれぞれＶの範囲の中におさまっている。
これを、演算がＶで閉じているという。

③ 上記の演算が下の八個の公理を満たす。

Ａ１　任意のｖ、ｗに対し、$v+w=w+v$ が成り立つ。
Ａ２　任意のù、ｖ、ｗに対し、$u+(v+w)=(u+v)+w$ が成り立つ
Ａ３　任意のｖに対して $v+O=O$ が成り立つ＜Ｏは零ベクトル＞
Ａ４　任意のｖに対して v' が存在し、$v+v'=O$ が成り立つ
Ａ５　任意のα、βとｖに対して $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$ が成り立つ
Ａ６　任意のαとｖ、ｗに対して $\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w$ が成り立つ
Ａ７　任意のα、βとｖについて $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$ が成り立つ
Ａ８　任意のｖに対して $1v=v$ が成り立つ

以上の三つを満たせばベクトル空間といえる
空集合はベクトル空間として考えない

また、v' は逆ベクトルといい、$-v$ として表す

ここから先は教科書のうつしになりそうなことは書きません

問５．１
ｖの逆ベクトル $-v$ はただ一つしか存在しないことをしめせ

v'、v'' をｖの逆ベクトルとして仮定する
Ａ３より $v'+O=v'$
また、Ａ４より $v+v'=O$、$v+v''=O$ であるので、
$v'+O=v'+(v+v'')=(v+v')+v''=v''+O$　証明終

問５．２
公理を用いて次の等式を示せ。$nv=v+v+\cdots\cdots+v$（ｎ個）

$nv=(n-1)v+v=(n-2)v+v+v=\cdots$ と、これを $n-1$ 回繰り返すと、$nv=v+v+\cdots v$ が示される。

わかりにくいベクトル空間

関数の作るベクトル空間
𝓕(Ｉ)をℝの区間Ｉ上の関数ｆ Ｉ→ℝ全体の集合とする。和ｆ＋ｇとスカラー倍αｆをそれぞれ

(ｆ＋ｇ)(ｘ)＝ｆ(ｘ)＋ｇ(ｘ)　αｆ(ｘ)＝αｆ(ｘ)　と定義する。

このとき𝓕(Ｉ)はℝ上のベクトル空間
Ｏ(ｘ)＝０で、ｆの逆ベクトルは(－１)ｆである。

たとえば、Ｉを０＜ｘ≦πとする。このとき、ｆ(ｘ)の例として挙げられるのは
ｓｉｎ(ｘ)，ｃｏｓ(ｘ)、ｘ＾３＋ｘ＾－２などがあげられる

この関数自体をスカラー倍しても、足し合わせても、その結果はℝ上に収まる
これを見たら公理が成り立つのもイメージしやすい

問５．３
(ａ１　ａ２)＋（ｂ１＋ｂ２）＝（ａ１－ｂ１　ａ２－ｂ２）
ｃ(ａ１　ａ２)＝(ａ１／ｃ　ａ２／ｃ)　ｃ≠０
Ｏ　ｃ≠０
と定義したとき、8個の公理のうちいくつあてはまらないものがあるか答える

Ａ１　×
Ａ２　×・・・引く数が順番によって変化するから
Ａ３　〇
Ａ４　〇
Ａ５　〇
Ａ６　〇
Ａ７　×・・１／α＋βがかかるものと、１／α、１／β
がかかるものに分かれるから
Ａ８　〇

よって、三つある