（注）超手抜きなのでご了承ください。

7 章　偏微分　（**定義編**）　　（$\mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ と表記させていただきます）

$\boxed{7.1}$

・$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し、$|\boldsymbol{x}|(=\|\boldsymbol{x}\|)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2}$ を $\boldsymbol{x}$ のノルムという

・$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し、$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の距離 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$ で定義する

・$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n \\ \varepsilon > 0\end{array}\right.$ に対し、$\boldsymbol{a}$ の ε 近傍：$\mathrm{U}_\varepsilon(a)=\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\varepsilon\}$ と定義する

・$\boldsymbol{a}(\in \boldsymbol{R}^n)$ が A の内点 $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists\varepsilon > 0 \\ \mathrm{U}_\varepsilon(a) \subset \mathrm{A}\end{array}\right.$

外点 $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists\varepsilon > 0 \\ \mathrm{U}_\varepsilon(a) \cap \mathrm{A} = \phi \Leftrightarrow \mathrm{U}_\varepsilon(a) \subset \mathrm{A}^c\end{array}\right.$

境界点 $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathrm{U}_\varepsilon(a) \cap \mathrm{A} \neq \phi \\ \mathrm{U}_\varepsilon(a) \cap \mathrm{A}^c \neq \phi\end{array}\right.$ $(\varepsilon > 0)$

・$\mathrm{A}(\in \boldsymbol{R}^n)$ が開集合 $\Leftrightarrow$ A の点は全て A の内点$(\Leftrightarrow \partial\mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \phi)$

閉集合 $\Leftrightarrow \partial\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$

・開集合 A が連結である $\Leftrightarrow$ A 内の任意の 2 点が A 内の曲線(折れ線)で結べる

（弧状連結）

・$\mathrm{A}(\in \boldsymbol{R}^n)$ が連結な開集合の時、A の領域という

$\boxed{7.2}$

・$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ の時、$f(\boldsymbol{x})$ が A に収束する（$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}$）

$\Leftrightarrow$「$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad 0 < |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| < \delta \quad \boldsymbol{x} \in D \quad \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - \mathrm{A}| < \varepsilon$」

・ $f(\boldsymbol{x})$が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で連続$\Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})$

（$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta \quad \boldsymbol{x}\in D \Rightarrow |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|<\varepsilon$）

・ $f(\boldsymbol{x})$が $D(\subset \boldsymbol{R}^n)$ で連続$\Leftrightarrow$ $f(\boldsymbol{x})$はDの各点で連続

・ $D\subset \boldsymbol{R}^n \quad f(\boldsymbol{x}):D$で定義すると、$f(\boldsymbol{x})$が $D(\subset \boldsymbol{R}^n)$ で一様連続

$\Leftrightarrow$「$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in D \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|<\delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}')|<\varepsilon$」

$\boxed{7.3}$

・ $D\subset \boldsymbol{R}^2 \quad f(x,y):D$で定義　$\boldsymbol{a}=(a,b)\in D$とし、 $f(x,y)$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で $\boldsymbol{x}$ に関して偏微分可能

$$\Leftrightarrow \exists \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\left(=\lim_{x\to \boldsymbol{a}}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}\right)$$

$$(\Leftrightarrow \varphi(x)=f(a,b)\text{とおくとき}\exists\varphi'(a))$$

この極限値を $f(x,y)$の$(x,y)=(a,b)(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a})$ における$x-$偏微分関数といい

$f_x(a,b) \quad \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ のようにあらわす

・ $f(\boldsymbol{x}):D$で$x-$偏微分可能$\Leftrightarrow$ D の各点で x について偏微分可能

この時、$(x,y)\mapsto f_x(x,y)$を$f(x,y)$の$x-$偏導関数といい、 $f_x \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} \quad \dfrac{\partial}{\partial x}f \quad (f(x,y))_x$

のようにあらわす

・ $f(x,y)$が(a,b) で全微分可能

$$\Leftrightarrow \exists A,B:\text{定数}\ \{\ \begin{array}{l} f(x,y)=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)+g(x,y) \\ \dfrac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{}0 \end{array}$$

・ $f(x,y)$がDでC^1級$\Leftrightarrow$ Dでf_x, f_y が存在して、連続

・ $f(x,y)$がDでC^m級$\Leftrightarrow$ fのm 次以下の偏導関数が全て D で存在して連続