線形７

　線形写像の表現行列

ｆ　：Ｖ→Ｗを線形写像とする。このとき、Ｖ、Ｗの基底を$[v_1, \dots v_n], [w_1, .. w_m]$とする。
このとき、ｆ（v）はＷのベクトルなので、$[w_1, .. w_m]$の一次結合で表される。
これを行列Ａを用いて表すと
$(f(v_1), \dots, f(v_n))$＝$(w_1, .. w_m)$A
という風にあらわされる。この時、行列ＡをＶの基底、Ｗの基底に関するｆ　の表現行列であるという。

このとき、次の定理が成り立つ

定理

Ｖの任意のベクトルｖとそのｆによる像ｆ（v）について、基底に関するそれぞれの成分表示の間には次の関係が成り立つ。

$$[f(v)]w = A[v]\mathrm{v}$$

ここで$[v]$vは、$(v_1, v_2, \dots, v_n) \times [v]$v= ｖ
が成り立つ成分表示のことを示す。また、同様に、$[f(v)]w$も成分表示を示す。

証明

$[v]$v＝t$(x_1, x_2, \dots, x_n)$　（転置した縦長の数値ベクトル）　とおくと、

$$f(v) = f(x_1v_1 + x_2v_2, \dots, x_nv_n) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2), \dots, x_nf(v_n)$$

よって、　　　　＝$(f(v_1),\ f(v_2), \dots, x_nf(v_n))\ [v]$v
また、$(f(v_1), \dots, f(v_n))$＝$(w_1, .. w_m)$Aより、$f(v) = (w_1, .. w_m)$A$\,[v]$v
また、$f(v) = (w_1, .. w_m)[f(v)]w$なので、係数比較して、成分表示の一意性より、

$$[f(v)]w = A[v]\mathrm{v}$$

が成り立つ。　証明終

定理６．１３

Ｆ上のベクトル空間Ｖ，Ｗ，Ｚに対し、V＝$[v_1, \dots, v_n]$、W＝$[w_1, \dots, w_m]$,
Z＝$[\mathrm{z}_1, \dots, z_l]$をそれぞれの基底とする。ｆ：V→W, g: W→Z を線形写像とし、ｆ、ｇ、ｇ◦ｆに関する表現行列を順にＡ，Ｂ，Ｃとすると、Ｃ＝ＢＡとなる。

表現行列の定義より$(f(v_1), \dots, f(v_n))$＝$(w_1, .. w_m)$A、$(g(w_1), \dots, g(w_m))$＝$(z_1, \dots, z_l)B$
である。このとき、$(g(f(v_1)), \dots, g(f(v_n)))$＝$(z_1, \dots, z_l)C$となる時のＣを求める。
Ａ＝（a_{pq}）とすると、$f(v_1) = a_{11}\ w_1 + a_{21}w_2, \dots, +a_{m1}w_m$
これを線形変換ｇによって移動すると、

$g(f(v_1))$＝$g(a_{11}\ w_1+a_{21}w_2,\dots,+a_{m1}w_m)$ ＝$a_{11}\,g(\ w_1),\dots,a_{m1}g(w_m)$

これより、$(g(f(v_1)),\dots,g(f(v_n))=(g(w_1),\dots,g(w_m))A$

また、$(g(w_1),\dots,g(w_m))=(z_1,\dots,z_l)B$より、

$(g(f(v_1)),\dots,g(f(v_n))=(g(w_1),\dots,g(w_m))A$＝$(z_1,\dots,z_l)B\,A$

よって、C＝BA

証明終

定理６．１４

$f:V\to W$を線形写像とする。f のＶの基底 V＝$[v_1,\dots,v_n]$、Ｗの基底W＝$[w_1,\dots,w_m]$,に関する表現行列をA、f のＶの基底 V’＝$[v'_1,\dots,v'_n]$、Ｗの基底W’＝$[w'_1,\dots,w'_m]$に関する表現行列をＢとすると、Ｂ＝$T_{w,w'}^{-1}AT_{v,v'}$となる。

ここで、この$T_{w,w'}$、$T_{v,v'}$というのは行列であり、これは（$v'_1,\dots,v'_n)=(v_1,\dots,v_n)T_{v,v'}$が表される行列である。

証明は、教科書を見てください。

問６．１１

線形写像 f：$R[x]_2\to R[x]_2$ を f（P(x)）＝P’(x)と定義するとき、$R[t]_2$の基底$[1,x,x^2]$に関する f の表現行列Aを求めよ。また、f を三回合成した写像f^3の$[1,x,x^2]$に関する表現行列を求めよ

f（１）＝０、f（x)=1, f（x^2)=2x より、

（f（１)、f（x), f（x^2)）＝（１、x、x^2）ＡとなるＡを求めるので、A＝$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

また、f^3(1)=0, $f^3(x)=0, f^3(x^2)=0$

となるので、表現行列は０行列となる

また、f^3の表現行列はA^3であるので、そこからも求められる。

（i, j）成分のみが１でほかの成分が０である行列をE_{ij}と表し、このような行列を行列単位という。

問６．１２　P＝$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$とし、$f$ ：$M_2(F)\to M_2(F)$を f（X)=$P^{-1}XP$とする。f は線形写像であることを示し、$[E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}]$に関する表現行列Ａを求めよ。

解答

f（X＋X’)=$P^{-1}(X+X')P=P^{-1}XP+P^{-1}X'P$$f$（X)+ f（X’)かつ、

f（αX)＝$P^{-1}(\alpha X)P=\ \alpha P^{-1}XP$が成り=立つので、線形性は示される。

また、(f $(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22})$)=($E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$)A とな行列Aを求める。

f (E_{11}) = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= 2E_{11} + 2E_{12} - E_{21} - E_{22}$

f (E_{12})= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

=$2E_{11} + 4E_{12} - E_{21} - 2E_{22}$

f (E_{21}) = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

=$-E_{11} - E_{12} + E_{21} + E_{22}$

f $(E_{22}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

=$-E_{11} - 2E_{12} + E_{21} + 2E_{22}$

よって、A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

解答終

次からは、授業でのみ解説があったことをまとめます。

部分空間において、R^3にV = $\left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + y + z = 0 \right\}$が含まれる。

このとき、$f: R^3 \to R^3$を$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$として、さらに、$x \in \mathrm{V}, f(x) \in V$の場合で考える。

すると、$f(\boldsymbol{x})$ = $\begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ z + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$となり、この$f$ =f'とする。

このとき、f'をfのVへの制限という。

図形の変換

$f\colon\ x' = Ax\ \ x \in R^n$とする。

$l = x' = a + tv$ で表されるベクトルは直線である。これをfによって変形すると、

$f(l) = f(a) + tf(\mathrm{v})$で表される。これより、$f(\mathrm{v})$が〇ベクトルでないとき、$f(l)$は直線を表すベクトルであり、$f(\mathrm{v})$が〇ベクトルのときは　l　は一つの点に移される。

また、平行な二つのベクトルを同じ変換によって移動させると、移動させた後のベクトルは平行になる。なぜなら、平行なベクトルの間で異なるのは$l = x' = a + tv$のなかのaの部分だけであるためである。

次に、H:$x = a + tv + sw$ は平面を表すベクトルである。このとき、変換 f によって平面を移す。

$$f(H) = f(a) + tf(v) + sf(w)$$

ここで、$f(v)$、$f(w)$の両方が０ベクトルのとき、Ｈで表されるベクトルは点に移される。
片方が０ベクトルのとき、ベクトルは直線に移される。
両方０ベクトルではないとき、平面に移される。
また、互いに平行な平面は、移された後も平行である。
つまり、長方形は平行四辺形に、直方体は平行六面体へと移される。

行列式との関係
$f\colon\ x' = Ax\ \ x \in R^2$であって、Ｄが$R^2$に含まれているとき、面積である｜$f(D)$｜は、
｜$f(D)$｜ ＝行列式Ａ$\times |\mathrm{D}|$　のように表される。

また、$f\colon\ x' = Ax\ \ x \in R^3$であって、Ｄが$R^3$に含まれているときは、移動後の$f(D)$の体積は行列式Ａ（detA）倍される。