第 3 章万有引力による運動

3.1 角運動量

角運動量$\vec{L}$は次のように定義される。

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{r}$は物体の位置ベクトルを、$\vec{p}$は運動量を表す。また×は外積を表す。

外積について説明するのは面倒なので知らないという方は申し訳ありませんが、自分で調べてください。深入りしない限り、そんなに難しくないはずなので大丈夫です。

また、力のモーメント$\vec{N}$を次のように定義する。

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

よって

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$$

が成立する。つまり、$\vec{N} = 0$のとき角運動量は一定となる。このことを角運動量保存則という。このとき、物体は$\vec{L}$に垂直な平面内を運動する。

角運動量保存則が成り立つとき、位置ベクトルが平面内でdtの間に掃く面積は

$$ds = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}dt\right| = \frac{\left|\vec{L}\right|}{2m}$$

なので面積速度$\frac{ds}{dt}$は一定となる。

3.2 平面運動の極座標表示

平面の直交座標と極座標の関係は

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

であり、任意のベクトル$\mathbf{A}$は

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta$$

と表せる。但し$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$は極座標での動径方向と方位角方向の単位ベクトルである。

このとき、次のような関係が得られる。

$$A_r = A_x \cos\theta + A_y \sin\theta$$
$$A_\theta = -A_x \sin\theta + A_y \cos\theta$$

これは図を描いて説明すればわかりやすいが、その図を描くスキルが私にはないので、なぜこのような関係式が出てくるかわからない人は丸暗記するか、自分で図を描くか、してください。

A として速度 **v** を考える。

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} r\cos\theta = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$
$$v_y = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

なので、これを先ほど求めた関係式に代入すると

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

が得られる。同様にして加速度の場合も求めると次のようになる。

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt} r^2\dot{\theta}$$

よって

$$F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \quad \cdots(1)$$
$$F_\theta = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt} r^2\dot{\theta} \quad \cdots(2)$$

となる。このとき力のモーメントは定義より

$$rF_\theta = m\frac{d}{dt} r^2\dot{\theta}$$

となるので、$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ より

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

となる。(今は平面上の運動を考えているので、角運動量は平面に垂直な方向の成分しか持たない。そのためここではスカラーで表している。)

よって面積速度は

$$\frac{1}{2}\left|r^2\dot{\theta}\right| = \frac{1}{2}\left|rv_\theta\right| \qquad \left(\because v_\theta = r\dot{\theta}\right)$$

とも表せる。

3.3 万有引力

万有引力は皆さん高校でやっているはずなので、おさらい程度に書きます。

万有引力定数Gは約$6.673\times10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$である。

万有引力によるポテンシャルエネルギーは

$$\mathrm{U}(r) = -\int_\infty^r \left(-G\frac{m_1m_2}{r^2}\right)dr = -G\frac{m_1m_2}{r}$$

となる。

3・4 ケプラーの法則

第1法則(楕円軌道の法則) 惑星は、太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く。

第2法則(面積速度一定の法則) 惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は、一定である(面積速度一定)。

第3法則(調和の法則) 惑星の公転周期の2乗は、軌道の長半径の3乗に比例する

がケプラーの法則である。(ｂｙウィキペディア)

これらの証明をしていく。

惑星と太陽の質量をｍ、Ｍとして、太陽は原点に静止しているとする。このとき、(１)、(２)で運動方程式を立てると

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -G\frac{Mm}{r^2} \qquad (3)$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} = 0 \qquad \cdots(4)$$

となる。(３)の左辺が負になるのは惑星が太陽(原点)に引き付けられる方向に力がかかるからである。

（4）より

$$r^2\dot{\theta}=h \quad \cdots(5)$$

となる（hは定数）。また３．２節より面積速度は$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$なので第二法則は示された。

（5）より$\dot{\theta}=\frac{h}{r^2}$であり、これを（3）に代入すると

$$m\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta}\right)-r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2\right\}=-G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)-\frac{h^2}{r^3}=-G\frac{M}{r^2}$$

$$\frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)-\frac{h^2}{r^3}=-G\frac{M}{r^2}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)-\frac{1}{r}=-\frac{GM}{h^2}$$

このように変換でき、$r=\frac{1}{u}$を代入すると

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}$$

となる。$\frac{GM}{h^2}=\frac{1}{l}$と置き換えてこの微分方程式を解くと

$$u=\frac{1}{l}+C\sin(\theta+\alpha)$$

となる（C,αは積分の過程で出てきた変数）。よって

$$r=\frac{l}{1+Cl\sin(\theta+\alpha)}$$

ここで$Cl=e$とおくと

$$r=\frac{l}{1+e\sin(\theta+\alpha)}$$

となる。これは高校で習った、原点を焦点とする二次曲線の極座標表示の形である。e=0 のときは円、0<e<1 のときは楕円、e=1 のときは放物線、1<e のときは双曲線をあらわす。よ

って第一法則は示された。

　楕円の長半径をａ、短半径をｂとおくと

$$a = \frac{l}{1-e^2}$$

$$b = \frac{l}{\sqrt{1-e^2}}$$

となり（頑張って計算すれば出ます）、楕円の面積は πab なので惑星の公転周期Ｔは楕円の面積を面積速度で割った

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{h}{2}} = \frac{2\pi}{h}\frac{l^2}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

となる。これを２乗すると

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{h^2}\frac{l^3}{1-e^3} = \frac{4\pi^2 l}{h^2}a^3$$

となり、第三法則は示された。