

楽器の物理

1) ピアノとハープ

〈i〉ピアノ

長さ l の弦の振動は

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e_m(x) Q_m(t)$$

$$Q_m(t) = A_m \cos(\omega_m t + \alpha_m)$$

$$e_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \kappa_m x$$

$$\kappa_m = \frac{m\pi}{l}$$

$$\omega_m = c \kappa_m$$

と表せた。弦の $x = x_0$ の場所をたたくとすると初期条件を

$$u(x, 0) = 0$$

$$\dot{u}(x, t) = v \delta(x - x_0)$$

$$\text{ただし } \delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

と与えることができる。この δ をデルタ関数といい、次のことが成立する。

$$\int_{-k}^k f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (k > 0)$$

この時、

$$u(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \alpha_m \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{m\pi x}{l} = 0$$

$$\dot{u}(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} -A_m \omega_m \cos \alpha_m \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{m\pi x}{l} = v \delta(x - x_0)$$

となる。初期の変位が 0 なので $\alpha_m = \frac{\pi}{2}$ であることがわかる。 A_n を求めるには、 $\dot{u}(x, 0)$ に

$\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$ を掛けて積分すればよい。そうすると基底の直交性より

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(-A_m \omega_m \frac{2}{l} \int_0^l \sin \kappa_m x \sin \kappa_n x dx \right) = v \int_0^l \delta(x - x_0) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \kappa_n x dx$$

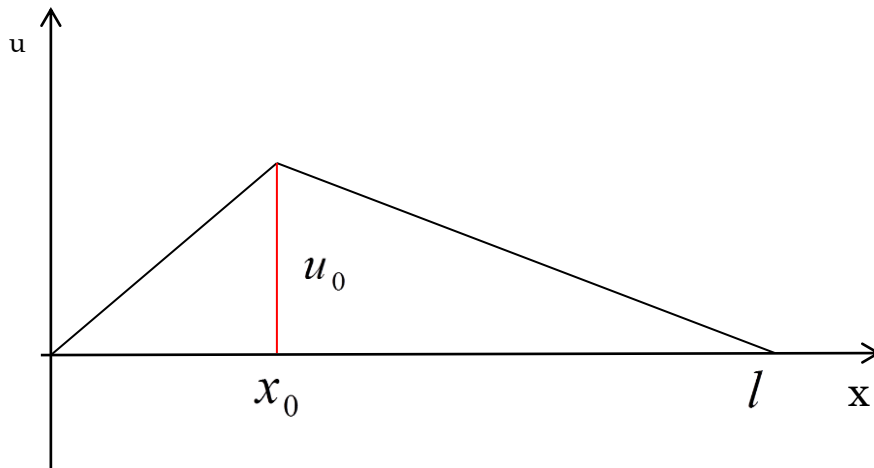
$$-A_n \omega_n = \sqrt{\frac{2}{l}} v \sin \kappa_n x_0$$

$$A_n = -\frac{\sqrt{2} l v}{c n \pi} \sin \frac{n \pi x_0}{l}$$

となり、 A_n が得られる。よって、ピアノでの弦の振動がわかった。

〈ii〉 ハープ

ハープは弦を引っ張って放す弦楽器なので弦を引く場所 x_0 とし、そこでの変位を u_0 とすると、初期条件は次のように与えられる。



$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x}{x_0} u_0 & (x \leq x_0) \\ \left(1 - \frac{x - x_0}{l - x_0}\right) u_0 & (x \geq x_0) \end{cases}$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0$$

今回もピアノのときと同様に積分をして α_n, A_n を求めると

$$\alpha_n = 0$$

$$A_n = \frac{\sqrt{2l}}{\pi^2} \frac{l^2 u_0}{x_0(l-x_0)} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_0}{l}$$

が得られる。

2) 円筒構造の楽器

〈i〉フルート

フルートの構造は息を吹き付ける歌口と開いた指穴の両方が開端とみなせるので、円筒内での圧力に対する平面派の波動方程式と境界条件は

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$p(0, t) = p(l, t) = 0$$

となる。これを解くと

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \left(\frac{cn\pi}{l} t + \alpha_n \right)$$

となる。

〈ii〉クラリネット

クラリネットは歌口が閉端、指穴が開端であるので境界条件は

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$p(l, t) = 0$$

となるので波動方程式を解くと

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi x}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) \cos \left(\frac{c\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) t + \alpha_n \right)$$

となる。

3) 円錐構造の楽器

〈i〉オーボエ

オーボエは歌口を頂点とする円錐形となっている。歌口は閉端、もう一方は開端である。円錐管では、頂点を中心とする球面波で満たされ、開端部で反射した音波は内向きの球面波として頂点に戻る。圧力に対する球面波の波動方程式と境界条件は

$$p(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{r}\sin(k_nr-\omega_nt+\alpha_n)+\frac{A_n}{r}\sin(k_nr+\omega_nt+\beta_n)\right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}(0,t)=0$$

$$p(l,t)=0$$

となる。 $\frac{\partial p}{\partial r}(0,t)=0$ について、 $r=0$ は定義されないので十分小さい $\varepsilon>0$ をとって

$$\frac{\partial p}{\partial r}(\varepsilon,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2A_nk_n}{\varepsilon}\cos\left(k_n\varepsilon+\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)\cos\left(\omega_nt-\frac{\alpha_n-\beta_n}{2}\right)\right. \\ \left.-\frac{2A_n}{\varepsilon^2}\sin\left(k_n\varepsilon+\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)\cos\left(\omega_nt-\frac{\alpha_n-\beta_n}{2}\right)\right]$$

とし、 $\varepsilon\rightarrow 0$ のとき $\frac{\partial p}{\partial r}(\varepsilon,t)\rightarrow 0$ となる条件を求める。上式右辺の第2項は ε^{-2} で第1項よりも速く発散するので第1項と同じ速さで発散するために $\alpha+\beta=0$ である必要がある。

このとき、都合よく $\frac{\partial p}{\partial r}(\varepsilon,t)\rightarrow 0$ となることがわかる。

また、 $p(l,t)=0$ より $k_n=\frac{n}{l}\pi$ であり、これより $\omega_n=\frac{cn\pi}{l}$ となる。この結果

$$p(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{A_n}{r}\sin k_nr\cos(\omega_nt-\gamma_n)$$

となる。