

力学 期末テスト問題

- [1] 位置座標 (x, y, z) にある質点の持つポテンシャルエネルギーが次の (1) (2) のそれぞれの場合について、力の x, y, z 成分を求めよ。次に、それぞれの場合について、原点回りの角運動量の各成分 L_x, L_y, L_z のうち、保存するものがあればあげよ。ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり、 A と α は 0 でない定数とする。

$$(1) U(x, y, z) = -A \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (2) U(x, y, z) = A \sqrt{x^2 + y^2},$$

- [2] 原点からの中心力 $F(r)$ を受けて運動する質量 m の質点の運動を極座標 (r, θ) で考える。

- (1) r, θ についての運動方程式を書け。
- (2) 運動方程式より面積速度一定則を示せ。以下で、面積速度の 2 倍を h とする。
- (3) $F(r) = -c/r^3$ (c は定数) の場合を考える。 $1/r = u$ とおくとき、 u と θ の間の関係を与える微分方程式を導出せよ。
- (4) 前問 (3) で得た方程式について、 $u(\theta)$ の一般解を求めよ (場合分けをすること)。

- [3] 以下の問に答えよ。

- (1) 緯度 θ の地点において、質量 m の小物体の運動を、地表に固定された座標系 (x', y', z') 地表で観測する。鉛直方向に z' 、真北に y' 、真東に x' をとる。地球の自転の角速度を ω 、 $(F_{x'}, F_{y'})_{\text{地表}}$ を慣性力以外の x', y' 方向の力として、地表付近の水平方向の運動 ($z' = 0$ の運動) について、運動方程式

$$m \left(\frac{d^2 x'}{dt^2}, \frac{d^2 y'}{dt^2} \right)_{\text{地表}} = (F_{x'}, F_{y'})_{\text{地表}} + 2m\omega \sin \theta \left(\frac{dy'}{dt}, -\frac{dx'}{dt} \right)_{\text{地表}}$$

を導出せよ。地球の自転によるコリオリ力が $-2m\omega \times \mathbf{v}'$ 、 $\mathbf{v}' = \left(\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt} \right)_{\text{地表}}$ 、 $\omega = (0, \omega \cos \theta, \omega \sin \theta)_{\text{地表}}$ と与えられることを既知としてよい。地球の自転による遠心力の影響は鉛直方向の重力に取り込むものとする。

- (2) 北緯 45° の地点でアイスホッケーをして、ゴールから 10m の地点から初速 50m/s でシュートをした。パックはゴールの地点で初速の方向から水平方向にどれだけずれるか、有効数字一桁、mm 単位で答えよ。空気抵抗や摩擦は無視し、ずれる原因としては地球の自転によるコリオリ力の影響のみを考える。