

平成24年度卒業論文
日本音楽十二律の推定の再検討

所属ゼミ 村澤ゼミ
学籍番号 1090401093
氏名 中喜重

大阪府立大学経済学部

要約

音高とは音の高さを表す言葉である。しかし、音高を表す周波数という概念ができたのは近代であるのでそれ以前の周波数は明らかにされていない。一方でアレクサンダー・エリスは 1884 年に日本音楽の十二律を表す音叉列の周波数を測定している。エリスによると、日本音楽の十二律を表す当時の音叉列の標準音の周波数は 292.7Hz である。標準音とは 12 個の音を決定するのにまず調律具などから取る最初の音であり、日本では壺越(洋楽名では D)の音がこれにあたる。その周波数と音律は明土(2011)ですでに求められているが、推定されたものではない。本稿では、統計手法を用いて標準音の周波数と音律を推定し、明土の結果の再検討を行った。分析の結果標準音の周波数は 291.663Hz、音律は壺越から完全 5 度ずつ 3 つ、完全 4 度ずつ 8 つの音をとったものであることが判明した。

目次

第 1 章 はじめに	4
第 2 章 日本音楽十二律	5
第 1 節 周波数とセント値.....	5
第 2 節 十二律のでき方.....	6
第 1 項 三分損益法	6
第 2 項 順八逆六法・順六逆八法.....	6
第 3 節 日本音楽十二律.....	7
第 1 項 日本音楽十二律.....	7
第 2 項 標準音	7
第 3 項 音律のパターン.....	8
第 3 章 先行研究	10
第 4 章 データ	11
第 5 章 分析手法	12
第 1 節 日本音楽十二律の音律の推定	12
第 2 節 各音律間のセント値.....	12
第 3 節 周波数の対数値の測定	13
第 6 章 分析結果	15
第 7 章 終わりに	16
参考文献	17

第1章 はじめに

音高とは音の高さを表す言葉である。しかし、音高を表す周波数という概念ができたのは近代であるのでそれ以前の周波数は明らかにされていない。一方でアレクサンダー・エリスは 1884 年に日本音楽の十二律を表す音又列の周波数を測定している。エリスによると、日本音楽の十二律を表す当時の音又列の標準音の周波数は 292.7Hz である。標準音とは 12 個の音を決定するのにまず調律具などから取る最初の音であり、日本では壺越(洋楽名では D)の音がこれにあたる。その周波数と音律は明土(2011)ですでに求められているが、推定されたものではない。本稿では、統計手法を用いて標準音の周波数と音律を推定し、明土の結果の再検討を行った。分析の結果標準音の周波数は 291.663Hz、音律は壺越から完全 5 度ずつ 3 つ、完全 4 度ずつ 8 つの音をとったものであることが判明した。

本稿の構成は以下のとおりである。まず第 2 章で日本音楽十二律についての簡単な説明をする。次に第 3 章で先行研究を紹介する、第 4 章でデータについての説明、第 5 章で分析手法、第 6 章で分析結果を説明する。最後に第 7 章で今後の課題を述べる。

第2章 日本音楽十二律

本稿に出てくる十二律や音律とは 12 個の音のそれぞれの音高を 1 まとめたものと考えてよい。

第1節 周波数とセント値

音高は周波数で表され、単位は Hz(ヘルツ)を用いる。1Hz とは 1 秒間に 1 回振動するという意味である。Hz の値が高くなるほど音も高くなっていく。ある音とその 1 オクターブ上の音の周波数の比は 1:2 であり、2 オクターブ、3 オクターブになると 1:4、1:8 と等比数列をなしていく。私たちがよく耳にする音楽はオクターブ上の周波数比 1:2 を 12 等分した平均律という音律を用いている。

2 音間の音程はセント(cent)という単位で表される。平均律による半音間の音程は 100 セントと定められている。すると 1 オクターブ間は 1200 セントであり、2 オクターブ間は 2400 セント、3 オクターブ間は 3600 セントと等差数列をなしていく。

周波数とセントの関係であるが、仮に周波数が f_0 と f_1 の 2 つの音があるとすると、 f_0 に対する f_1 のセント値は $1200 \log_2(f_1/f_0)$ で求められる。この式は後の分析手法で用いる。

第2節 十二律のでき方

第1項 三分損益法

十二律は日本よりも早く中国で三分損益法と呼ばれる方法で作成されている。古代中国の周(紀元前 1027～紀元前 249)であるが年代の特定はできていない。長さ約 27.7cm、直径約 1.5cm の葦(あし)と呼ばれる植物を吹いて出る音を「黄鐘(こうしょう)」と名付けた。そしてその葦を $1/3$ 短くしたり $1/3$ 長くしたりして 12 個の音を決定していく方法である。この方法によって $1/3$ 短くすると周波数比が $3/2$ (完全 5 度上)、 $1/3$ 長くすると周波数比が $3/4$ (完全 4 度下)の音が取れる。これを繰り返していく。13 回目には最初の音の 1 オクターブ上、周波数が 2 倍になるはずであるが、実際は 2.027 倍となり、元の音と合わない。これを修正するために 1 オクターブ高い音は元の音の 2 倍の周波数として求めた。

第2項 順八逆六法・順六逆八法

日本独自の十二律に順八逆六法・順六逆八法というものがある。しかし、この名前が記されている古文書はなく、近代の研究者が名付けたものである。順八逆六法は最初の音を調律具などから取り、その音から数えて 8 つ上(半音含む)の音を取り、さらにそこから 6 つ下の音を取り、繰り返して 12 個の音を取る方法である。8 つ上は周波数比が $3/2$ (完全 5 度上)、6 つ下は周波数比が $3/4$ (完全 4 度下)の音が取れる。この方法は三分損益法と全く同じである。順六逆八法は反対に 6 つ上、8 つ下を繰り返して取っていく方法である。6 つ上は周波数比が $4/3$ (完全 4 度下)、8 つ下は周波数比が $2/3$ (完全 5 度下)の音が取れる。しかし、これらの方法も三分損益法と同様オクターブ上の周波数はきれいな 2 倍の数値にならない。

第3節 日本音楽十二律

第1項 日本音楽十二律

本稿で出てくる「日本音楽十二律」について説明する。東京芸術大学百年史(1987)によるとエリスが 1884 年に測定した音叉列は「雅楽琵琶の平調を示す音叉」、「俗箏の平調子を示す音叉」、「日本音楽十二律を示す音叉」の 3 種類である。俗箏とは当時の雅楽以外の音楽を俗楽と呼んでいるがそのときに使う箏の呼称である。すると当時の日本には雅楽と俗楽しかありえないことになり、日本音楽十二律とは何を指しているのか不明である。それについては第 3 章で述べる。本稿での「日本音楽十二律」とは、当時エリスが測定した日本音楽十二律を表す音叉列の音律のことである。

第2項 標準音

要約でも述べたが日本の音律の標準音は雅楽、俗楽、日本音楽十二律ともに壱越である。考えられる理由として一つは三分損益法で最初に得た黄鐘(こうしょう)の音は壱越であるといわれているからである。もう一つはエリスが測定した音叉列にある。その音叉列の音叉は全部で 13 個あり、壱越の音叉が低いものと 1 オクターブ高いもので 2 つある。しかし、明土(2011)にも書かれているように、音叉を製作する元となったのは「宮内庁楽部で用いられた十二律管」とされている。これを考慮すると、13 個目の高い壱越の音は十二律管には無く、音叉は別に新しく製作されたものであると考えられる。この理由は西洋の文化に合わせるため、西洋音階のドレミファソラシドという最後にもう一度 1 オクターブ高い「ド」をとるような形に合わせたと考えられる。ここで 2 つ音叉がある音は壱越である。これは壱越が当時の標準音であったからだと考えられる。以上のことから壱越は当時の日本の十二律の標準音であり、本稿ではその周波数を再検討する。

参考までに現在の雅楽十二律の標準音の周波数は 286.67Hz で昭和時代初期に意図的な変更がなされている。また俗楽は種類が増え、周波数が一律に決められているわけではなく、演奏者または演奏団体に違いがある。

第3項 音律のパターン

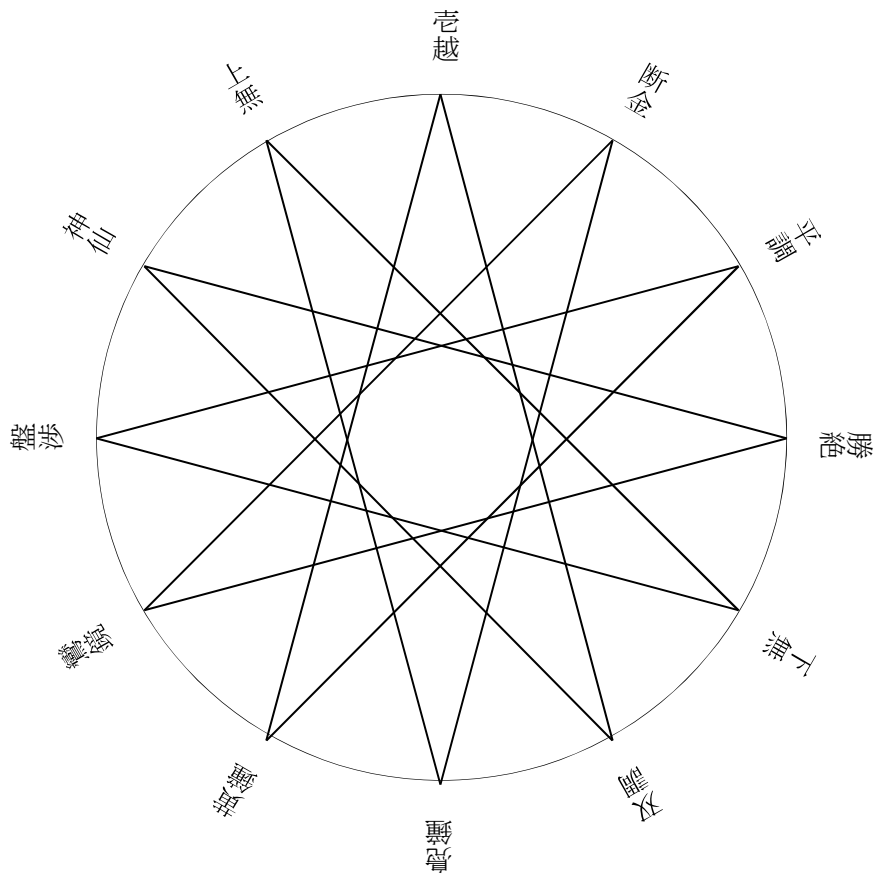
日本音楽十二律は上記で説明した順八逆六法と順六逆八法を組み合わせた音律であるとされている。12個の音の取り方であるが、まず標準音を調律具などから取り、次にその音から順八逆六法または順六逆八法で次の音を取り、さらにその音からまた同じように音を取っていく。取り方は全部で12通りである。ここで、順八逆六法によって取った音の数を m 、順六逆八法によって取った音の数を n とする。そしてその音律を (m,n) と表す。 m と n の和は必ず11になる。例えば音律(6,5)の場合音の取り方は順八逆六法で壺越→黄鐘(おうしき)→平調→盤渉→下無→上無→鳧鐘、順六逆八法で壺越→双調→神仙→勝絶→鸞鏡→断金である。参考までに三分損益法は(11,0)である。本稿ではエリスが測定した日本音楽十二律は12通りの音律のどれに最も近いかを再検討する。

最後に本稿で出てくる音名の一覧を表2-1にまとめておく。図2-1は各音の関係を表している。線で結ばれた音が順八逆六法、または順六逆八法でとれる音である。

表2-1 音名の一覧

洋楽名	日本音名		古代中国律名	
	音名	よみがな	音名	よみがな
C#, D \flat	上無	かみむ	応鐘	おうしょう
C	神仙	しんせん	無射	ふえき
B	盤渉	ばんしき	南呂	なんりょ
A#, B \flat	鸞鏡	らんけい	夷則	いそく
A	黄鐘	おうしき	林鐘	りんしょう
G#, A \flat	鳧鐘	ふしょう	蕤賓	すいひん
G	双調	そうじょう	仲呂	ちゅうろ
F#, G \flat	下無	しもむ	姑洗	こせん
F	勝絶	しょうぜつ	夾鐘	きょうしょう
E	平調	ひょうじょう	太蔟	たいそう
D#, E \flat	断金	たんぎん	太呂	たいりょ
D	壺越	いちこつ	黄鐘	こうしょう

図 2-1 各音の関係



第3章 先行研究

今回の再検討にあたり、その元となる論文は明土(2011)である。そこでは日本のかつての標準音である壺越の周波数が 291.333Hz であったと主張した。また、第2章で述べた12通りの音律とエリスの測定値との残差の平均と平方和を調べ、日本音楽十二律は音律(3,8)が最も平方和の値が小さいことを明らかにした。さらに平方和は続いて(5,6)、(4,7)が小さく、この3パターンが候補にあげた。ここで、明土によれば当時の雅楽十二律は(6,5)、俗楽十二律は(3,8)である。では日本音楽十二律はというと博覧会の出展で日本の音律をわかりやすくすることのみを目的として作られ、雅楽十二律と俗楽十二律を統合したものであるとみなした。そして統計分析以外にもその歴史的背景から日本音楽十二律の音律は(5,6)であると結論付けている。

ここで再検討をする要因となったのは、1つは明土が求めた 291.333Hz という数字は推定されたものではないというところである。エリスの測定結果では黄鐘の音は 437.0Hz となっている。また押田(1981)によると平安時代に吉備真備が唐から持ち帰った銅律管の黄鐘の音が 437Hz と言われており、両者の周波数は一致する。そこで明土はこの 437.0Hz を元に完全5度下の壺越の周波数 291.333Hz を求めた。そこから明土はエリスが測定した3種類の音叉列それぞれにおいて、測定値の残差の平均と95%信頼区間から 291.333Hz が標準音であると結論付けている。しかし、正確なチューニング機器が存在しなかった当時は現在ほど確実な周波数を求めることはできない。つまりエリスの黄鐘の測定結果や銅律管の周波数が本当に 437.0Hz だったのかどうか定かではないのである。そこで、本稿では標準音の周波数はわからないものとしてその値を推定する。

もう1つは明土が日本音楽十二律は(3,8)が最も平方和が小さいと分析した統計手法にある。明土は壺越の周波数を 291.333Hz と仮定したうえで12通りの音律の周波数を求め、エリスの測定値との残差の平均と平方和を算出している。しかし、壺越の周波数を未知としたならば、最も日本音楽十二律に近い音律も変わってくる可能性がある。本稿では、明土とは違う分析手法で12通りの音律とエリスの測定値との残差の平均と平方和を求める。

第4章 データ

本稿で分析に用いるデータは表 4-1 の通りである。エリスは 1884 年に日本から送付された日本音楽十二律を表す音又列の周波数をすべて測定し、表にしている。表 4-1 はエリス(1951)に記載されている表の一部である。一律間の音程とは一つ下の音とのセント値であるが本来なら壹越からの音程は一律間の音程を壹越から足し合わせた値になるはずであるが、エリスの測定値に誤差があるため、必ずしもその値になっていない。また、エリス(1951)の表では一律間の音程と壹越からの音程は整数部分までしか書かれていなかったため、もう一度第 2 章の周波数とセント値の公式を用いて求め、小数第 1 位まで求めた。下の壹越の周波数を f_0 、断金から上の壹越までの周波数を f_1 から f_{12} とする。するとある音 i とひとつ下の音 ($i-1$) のセント値は $1200\log_2(f_i/f_{i-1})$ 、ある音 i と壹越からのセント値は $1200\log_2(f_i/f_0)$ で表せられる。

また、第 2 章で述べたとおり高い壹越は低い壹越の周波数を 2 倍した値で音又を別に製作しているため、測定値も 2 倍になっている。

表4-1 エリスの測定値

日本音名	周波数 (Hz)	音程(セント)	
		一律間	壹越から
壹越	585.4	109.6	1200.0
上無	549.5	104.5	1090.4
神仙	517.3	88.6	985.9
盤涉	491.5	113.5	897.3
鸞鏡	460.3	89.9	783.8
黄鐘	437.0	110.0	693.9
鳧鐘	410.1	80.4	583.9
双調	391.5	118.0	503.5
下無	365.7	110.4	385.5
勝絶	343.1	87.4	275.0
平調	326.2	112.9	187.6
断金	305.6	74.7	74.7
壹越	292.7	-	0.0

第5章 分析手法

第1節 日本音楽十二律の音律の推定

本稿で実際に行う分析を説明する。本稿で推定するのは日本音楽十二律の標準音の周波数と音律である。まず周波数を未知の数とおき、先に音律を推定する。音律は(0,11)から(11,0)までの12通りであり、その1通りに対してエリスの測定値とどれだけ誤差が生じるかを求める。そしてその誤差を音律ごとに平方和し、最も平方和が小さい値になった音律を日本音楽十二律の音律とみなす。次に標準音の周波数であるが、そのときの音律での平均値をその周波数とみなす。

第2節 各音律間のセント値

分析にはエリスの測定値のデータ以外に(0,11)から(11,0)までの各音律のセントの理論値を必要とする。セント値はどの音名、周波数の音でも同じ音律で取っていたら理論上は同じになる。表5-1は各音律の一律間の音程の理論値である。セント値は第2章の公式を用いて求めた。音律によってどの音が違うかがわかりやすい。

表5-1 一律間の音程(セント)

	(0,11)	(1,10)	(2,9)	(3,8)	(4,7)	(5,6)	(6,5)	(7,4)	(8,3)	(9,2)	(10,1)	(11,0)
壱越	113.7	113.7	113.7	113.7	113.7	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2
上無	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	113.7	113.7	113.7	113.7	113.7	90.2	90.2
神仙	113.7	113.7	113.7	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	113.7	113.7
盤涉	90.2	90.2	90.2	113.7	113.7	113.7	113.7	113.7	90.2	90.2	90.2	90.2
鸞鏡	113.7	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	113.7	113.7	113.7	113.7
黄鐘	90.2	113.7	113.7	113.7	113.7	113.7	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2
鳧鐘	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	113.7	113.7	113.7	113.7	113.7	90.2
双調	113.7	113.7	113.7	113.7	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	113.7
下無	90.2	90.2	90.2	90.2	113.7	113.7	113.7	113.7	113.7	90.2	90.2	90.2
勝絶	113.7	113.7	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	113.7	113.7	113.7
平調	90.2	90.2	113.7	113.7	113.7	113.7	113.7	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2
断金	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	113.7	113.7	113.7	113.7	113.7
壱越	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

第3節 周波数の対数値の測定

標準音である壱越の音の周波数の推定は残差の平方和と平均値から推定する。壱越の周波数を θ 、ある音 i と下の壱越とのセント値を d_i 、そしてエリスの測定値のある音名 i の周波数を X_i 、その誤差を U_i とする。 i は下の壱越からオクターブ上の壱越までの 13 通ある。 d_i は表 5-2 の値である。 X_i は表 4-1 のエリスの測定値の値である。第 2 章での周波数とセント値の関係式を用いると、

$$d_i = 1200 \log_2 \left(\frac{X_i U_i}{\theta} \right)$$

となる。これを移項して $\log_2 \theta$ の値について解くと、

$$\log_2 \theta = \log_2 X_i - \frac{d_i}{1200} + \log_2 U_i \cdot \dots \cdot \textcircled{1}$$

と表せられる。①式に音律のパターン 12 通りをすべて代入してそれぞれの誤差 U_i を含んだ $\log_2 \theta$ の値を求める。表 5-3 はその結果である。本来なら $\log_2 \theta$ の値はすべて同じになるが、誤差を含んでいるため値はさまざまである。この表から音律 1 通りに対して壱越からオクターブ上の壱越までの $\log_2 \theta$ の平均値と残差の平方和を求める。そして一番残差の平方和が小さい値の音律をエリスの測定値から推定される当時の日本音楽の音律とみなし、その平均値をその標準音の周波数とする。

表5-2 壱越からの音程(セント)

	(0,11)	(1,10)	(2,9)	(3,8)	(4,7)	(5,6)	(6,5)	(7,4)	(8,3)	(9,2)	(10,1)	(11,0)
壱越	1200.0	1200.0	1200.0	1200.0	1200.0	1200.0	1200.0	1200.0	1200.0	1200.0	1200.0	1200.0
上無	1086.3	1086.3	1086.3	1086.3	1086.3	1109.8	1109.8	1109.8	1109.8	1109.8	1109.8	1109.8
神仙	996.1	996.1	996.1	996.1	996.1	996.1	996.1	996.1	996.1	996.1	1019.6	1019.6
盤渉	882.4	882.4	882.4	905.9	905.9	905.9	905.9	905.9	905.9	905.9	905.9	905.9
鸞鏡	792.2	792.2	792.2	792.2	792.2	792.2	792.2	792.2	815.6	815.6	815.6	815.6
黄鐘	678.5	702.0	702.0	702.0	702.0	702.0	702.0	702.0	702.0	702.0	702.0	702.0
亮鐘	588.3	588.3	588.3	588.3	588.3	588.3	611.7	611.7	611.7	611.7	611.7	611.7
双調	498.0	498.0	498.0	498.0	498.0	498.0	498.0	498.0	498.0	498.0	498.0	521.5
下無	384.4	384.4	384.4	384.4	407.8	407.8	407.8	407.8	407.8	407.8	407.8	407.8
勝絶	294.1	294.1	294.1	294.1	294.1	294.1	294.1	294.1	294.1	317.6	317.6	317.6
平調	180.4	180.4	203.9	203.9	203.9	203.9	203.9	203.9	203.9	203.9	203.9	203.9
断金	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	90.2	113.7	113.7	113.7	113.7	113.7
壱越	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表5-3 $\log_2 \theta$ の値

	(0,11)	(1,10)	(2,9)	(3,8)	(4,7)	(5,6)	(6,5)	(7,4)	(8,3)	(9,2)	(10,1)	(11,0)
壹越	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193
上無	8.197	8.197	8.197	8.197	8.197	8.177	8.177	8.177	8.177	8.177	8.177	8.177
神仙	8.185	8.185	8.185	8.185	8.185	8.185	8.185	8.185	8.185	8.185	8.165	8.165
盤渉	8.206	8.206	8.206	8.186	8.186	8.186	8.186	8.186	8.186	8.186	8.186	8.186
鸞鏡	8.186	8.186	8.186	8.186	8.186	8.186	8.186	8.186	8.167	8.167	8.167	8.167
黄鐘	8.206	8.187	8.187	8.187	8.187	8.187	8.187	8.187	8.187	8.187	8.187	8.187
鳧鐘	8.190	8.190	8.190	8.190	8.190	8.190	8.170	8.170	8.170	8.170	8.170	8.170
双調	8.198	8.198	8.198	8.198	8.198	8.198	8.198	8.198	8.198	8.198	8.198	8.178
下無	8.194	8.194	8.194	8.194	8.175	8.175	8.175	8.175	8.175	8.175	8.175	8.175
勝絶	8.177	8.177	8.177	8.177	8.177	8.177	8.177	8.177	8.177	8.158	8.158	8.158
平調	8.199	8.199	8.180	8.180	8.180	8.180	8.180	8.180	8.180	8.180	8.180	8.180
断金	8.180	8.180	8.180	8.180	8.180	8.180	8.180	8.161	8.161	8.161	8.161	8.161
壹越	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193	8.193

第6章 分析結果

第 4 章で説明した手法によって求めた $\log_2 \theta$ のは表 6-1 の通りである。(0,11) から(11,0)まではそれぞれの音律を表している。平均は各音律で壺越と各音のセント値を①式に代入して求めた値の平均値である。偏差平方和は平均との差の平方和である。標準誤差とはその標準誤差である。周波数は平均値の $\log_2 \theta$ を元の周波数の値に変換したものである。結果偏差平方和が最小になるのは音律(3,8)であり、標準音の周波数は 291.663Hz である。

表6-1 分析結果

	平均	偏差平方和	標準誤差	周波数(Hz)
(0,11)	8.193	0.000938	0.002452	292.576
(1,10)	8.191	0.000767	0.002217	292.272
(2,9)	8.190	0.000804	0.002270	291.967
(3,8)	8.188	0.000529	0.001842	291.663
(4,7)	8.187	0.000645	0.002033	291.359
(5,6)	8.185	0.000605	0.001969	291.055
(6,5)	8.184	0.000783	0.002241	290.752
(7,4)	8.182	0.001266	0.002849	290.449
(8,3)	8.181	0.001457	0.003056	290.147
(9,2)	8.179	0.001938	0.003524	289.844
(10,1)	8.178	0.002070	0.003642	289.542
(11,0)	8.176	0.001633	0.003235	289.241

第7章 終わりに

本稿で求めた音律(3,8)は明土の統計手法での結果と一致している。また標準音の周波数であるが本稿での **291.663Hz** と明土の **291.333Hz** では差は約 **1.96** セントしかなく、人間の耳では判別不能な差である。よって本稿は明土と同じ結果が得られたと考えてよい。明土はここからさらに日本音楽十二律は(5,6)と結論付けたが、本稿にしても明土にしてもエリスの測定した日本音楽十二律を表す音又列は音律(3,8)に最も近いのは明白である。しかし、当時の音律が順八逆六法、順六逆八法以外で作られた可能性もある。どのようなかたちでこの日本音楽十二律が作られたのかはまだ不明な部分が残されている。さらになぜ昭和時代初期に周波数の変更がなされたのかも不明であり、今後の課題でもある。

参考文献

明土真也 「基本的な統計手法の活用による日本の十二律の推定」『日本統計学会誌』,2011

A.J. エリス,門馬直美訳 『諸民族の音階 -比較音楽論-』音楽之友社,1951
東京芸術大学百年史編集委員会 『東京芸術大学百年史 東京音楽学校編 第1巻』音楽之友社,1987