問 37(ネイピア数の問題)

【解説】

解析学の序盤で出てくる問題です。高校数学でもお世話になるネイピア数。高校の時は「e^x の $x=0$ における微分係数がもとの値と変わらないもの」として導入されたと思います。これでは「ご都合主義」的な感じで導入されたように見えます。

実際は、「数列の極限値」として定義し、ここからみちびきだされる性質が上記の微分における命題なのです。

ばしばし使われているのですが、数学関係者以外(というか解析系以外?)は意外と頭から離れている事実ではあります。

【解答】

(1) $a_n \equiv \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が単調増加な数列であることを示す。

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n+1-k)}^{k}}{n^k k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot\cdots\cdot(1-\frac{k-1}{n})}^{k}}{k!} \\
&\le \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{1\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdot\cdots\cdot(1-\frac{k-1}{n+1})}^{k}}{k!} \\
&\le \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{(n+1)\cdot(n+1-1)\cdot\cdots\cdot(n+1-k+1)}^{k}}{n^k k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{n+1}C_k}{n^k} \\
&\le \sum_{k=0}^{n+1} \frac{{}_{n+1}C_k}{n^k} = a_{n+1}
\end{aligned}
$$

これより、a_n が単調増加列であることが分かる。次に、a_n が上に有界であることを示す。まず、a_n について、

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots\cdots(1-\frac{k-1}{n})}^{k}}{k!} \\
&\le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。各 $\dfrac{1}{k!}$ は $\dfrac{1}{2^k}$ で抑えられるので、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\infty$ となる。したがって、a_n が上に有界であることがわかる。

(2)

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} \\
&= \left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}
\end{aligned}
$$

より、題意が示されたことになる。

問 45(可換環の問題)

【解説】

この問題の元ネタは「整数係数の方程式の根は整数に限る」という問題です。なので、解法は元ネタと全く同じです。むしろそういうことができるように UHF まで一般化した、というのが正確な事実でしょう。この辺の理屈は、実は整数環とかやるときに役立つのではないでしょうか。

ちなみに大学受験の問題としては、「チェビシェフ多項式」に限定して出題されていたりするのも事実です。

【解答】

α は R の互いに素な素元 $p_1, p_2, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_n$ と単元 ε を用いて、$\alpha = \varepsilon \prod_{i=1}^{m} p_i^{m_i} \prod_{i=1}^{n} q_i^{-n_i}$ と(単元の自由度分を除いて)一意的に書ける(R は UHF だから) α の条件から

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

が成り立つ。これを α^n について解くと、

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_0$$

が成り立つ。両辺に $\prod_{i=1}^{n} q_i^{n_i}$ を n 回掛け算すると、$\varepsilon\prod_{i=1}^{m} p_i^{nm_i} = A\prod_{i=1}^{n} q_i^{n_i}$ (A は R の元)が成り立つことが分かる。p_i と q_i は互いに素だから、$n_i = 0$ のときのみ上記等式が成り立つことが分かる。これは、α が $\alpha = \varepsilon\prod_{i=1}^{m} p_i^{m_i}$ と書けることと同値であり、したがって α が R の元であることと同値である。