問 38(位相空間の問題)

【解説】

ホモトピー理論とかをやる上で非常に重要になる部分。このへんの議論がきちんとできていないと変な勘違いを起こすことが多くなる。この問題のミソは局所コンパクト性とコンパクト開位相の性質。ちなみに、コンパクト開位相は広義一様収束を一般化した概念である。以下の問題の Z を実数とすれば、コンパクト開位相と広義一様収束位相が一致することが分かる。

ちなみに、この解答は内田伏一「集合と位相」の内容を理解している人を対象に書いた…つもり。

【証明】

⑴ 任意の Z の開集合 O について、 $f_x^{-1}(O)$ が Y の開集合であることを示せばよい。

$f_x^{-1}(O)$ が Y の開集合であることを示すためには、以下の命題(*)が成り立つことを示せばよい。

(*)　任意の $y \in f_x^{-1}(O)$ に対して、$V_y \subset f_x^{-1}(O)$ となる y の開近傍 V_y が存在する。

ここから(*)が成り立つことを証明する。

任意に $y \in f_x^{-1}(O)$ を取り固定する。このとき、 $f(x,y) = f_x(y) \in O$ より、$(x,y) \in f^{-1}(O)$ が成り立つ。また、 f は連続写像だから、 $f^{-1}(O)$ は積空間 $X \times Y$ の開集合である。このことから、$(x,y) \in V_x \times V_y \subset f^{-1}(O)$ となる X の開集合 V_x と Y の開集合 V_y が存在する。ここで、この V_y が $f_x^{-1}(O)$ に含まれることを証明すればよい。任意の $y' \in V_y$ について、(x,y') $\in V_x \times V_y$ が成り立つので、$(x,y') \in f^{-1}(O)$、すなわち $f(x,y') = f_x(y') \in O$ が成り立つ。これは、 $y' \in f_x^{-1}(O)$ となることを示したことになる。これより、$V_y \subset f_x^{-1}(O)$ が証明されたことになる。

⑵ $C(Y,Z)$ のコンパクト開位相は、$\{W(K,V) \mid K \subset Y : \text{compact set}, V \subset Y : \text{open set}\}$(ただし、$W(K,V) \equiv \{f \in C(Y,Z) \mid f(K) \subset V\}$)から生成されるので、任意の $W(K,V)$ について、 $F^{-1}(W(K,V))$ が X の開集合であることを示せばよい。

(1)と同様に、$F^{-1}(W(K,V))$ が X の開集合であることを示すために、以下の命題(*)が成り立つことを示せばよい。
(*)　任意の $x \in F^{-1}(W(K,V))$ に対して、$U \subset F^{-1}(W(K,V))$ となる x の開近傍 U が存在する。
ここから(*)が成り立つことを証明する。

任意の $y \in K$ に対して、$F(x)(y) = f_x(y) \in V$ が成り立つので、$(x,y) \in f^{-1}(V)$ が成り立つ。

$f^{-1}(V)$ は積空間 $X \times Y$ の開集合だから、$(x,y) \in U_y \times V_y \subset f^{-1}(V)$ となる X の開集合 U_y

と Y の開集合 V_y が存在する。$K \subset \bigcup_{y \in K} V_y$ より、$\{V_y \mid y \in K\}$ は K の開被覆となる。K は Y の

compact set だから、$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ を満たす $y_1, y_2, \cdots, y_n \in K$ が存在する。ここで、$U \equiv \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$

と置くと、U は X の開集合で、$x \in U$ を満たす。
この U が $F^{-1}(W(K,V))$ に含まれることを示す。任意の $x' \in U$ を取り固定する。このとき、

$F(x') \in W(K,V)$、すなわち $f_{x'}(K) \subset V$ を示せばよい。任意の $y' \in K$ に対して、$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$

より、$y' \in V_{y_{i_0}}$ となる $i_0 \in \{1,2,\cdots,n\}$ が存在する。ここで、$x' \in U_{y_{i_0}}$ が成り立つので、

$(x',y') \in U_{y_{i_0}} \times V_{y_{i_0}} \subset f^{-1}(V)$ が成り立つ。したがって、$f_{x'}(y') = f(x',y') \in V$ が成り立つ。

したがって、$f_{x'}(K) \subset V$ が成り立つことがわかる。よって、$U \subset F^{-1}(W(K,V))$ が成り立つ。

(3) 任意の Z の開集合 O について、$f^{-1}(O)$ が積空間 $X \times Y$ の開集合であることを示せばよい。$f^{-1}(O)$ が $X \times Y$ の開集合であることを示すためには、以下の命題(*)が成り立つことを示せばよい。
(*)　任意の $(x,y) \in f^{-1}(O)$ に対して、$V \subset f^{-1}(O)$ となる (x,y) の開近傍 V が存在する。
ここから(*)が成り立つことを証明する。

$f_x(y) = f(x,y) \in O$ より、$y \in f_x^{-1}(O)$ が成り立つ。仮定から f_x が連続写像だから $f_x^{-1}(O)$

は Y の開集合となる。Y は局所コンパクト空間だから $y \in \mathrm{Int}K \subset f_x^{-1}(O)$ となる compact

set $K \subset Y$ が存在する（$\mathrm{Int}K$ は K の内部）$F(x) = f_x \in W(K,O)$ より、もう一つの仮定から、
$F^{-1}(W(K,O))$ は x の開近傍となる。ここで、$V \equiv F^{-1}(W(K,O)) \times \mathrm{Int}K$ と置くと、V は

(x, y)の開近傍となる。

このVが$f^{-1}(O)$に含まれることを示せばよい。任意の$(x', y') \in V$をとって、固定する。
$f_{x'} \in W(K, O)$より$f_{x'}(K) \subset O$が成り立つ。$y' \in K$となるから$f(x', y') = f_{x'}(y') \in f_{x'}(K)$
$\subset O$が成り立つ。したがって、$V \subset f^{-1}(O)$が成り立つ。

問 43(作用素論の問題)

【解説】

Hilbert-Schmidt 型作用素についての問題…と言っても、実際は導入レベルの問題だったりする。もう少し一般化するとトレースクラスの作用素やらなんやら出てきて、挙句の果てには「作用素版 Holder の不等式」まで導くことができる。

ここでの議論のポイントは、完全正規直交系の性質を以下にうまくつかうかである。特に Perseval の等式はこの問題で遺憾なく威力を発揮している。

ちなみに、この解答は日合・柳の「ヒルベルト空間と線形作用素」の 1 章から 2 章を理解している人を対象に書いた。

【証明】

(1) 完全正規直交系における Perseval の等式を使うことにより、

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\|Te_n\|^2 &= \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\left|\langle Te_n, e_m\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\left|\langle e_n, T^*e_m\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{m\geq 1}\|T^*e_m\|^2 \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\left|\langle e'_n, T^*e_m\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{n\geq 1}\|Te'_n\|^2\end{aligned}$$

が示せる。

(2) $S,T\in C_2(H),\alpha\in \mathrm{C}$ とすると、

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\|(\alpha S+T)e_n\|^2 &= \sum_{n\geq 1}\|\alpha Se_n+Te_n\|^2 \\ &\leq 2\sum_{n\geq 1}\|\alpha Se_n\|^2+\sum_{n\geq 1}\|Te_n\|^2 \\ &= 2|\alpha|\sum_{n\geq 1}\|Se_n\|^2+\sum_{n\geq 1}\|Te_n\|^2<\infty\end{aligned}$$

が成り立つので、$\alpha S+T\in C_2(H)$ が成り立つ。したがって $C_2(H)$ は $B(H)$ の線形部分空間である。

(3) (第一段) 問題文中で定義した $\langle \bullet,\bullet\rangle$ が well-defined であることを示す。これを示すために、まず完全正規直交系 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ について、$\sum_{n\geq 1}\left|\langle Te_n, Se_n\rangle\right|<\infty$ となることを示す。Holder の

不等式により

$$\sum_{n\geq 1}\left|\left\langle Te_n, Se_n\right\rangle\right| \leq \left(\sum_{n\geq 1}\|Te_n\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n\geq 1}\|Se_n\|^2\right)^{1/2} < \infty$$

が成り立つので、$\sum_{n\geq 1}\left|\left\langle Te_n, Se_n\right\rangle\right| < \infty$ が示される。

そして、完全正規直交系の取り方により値が変わらないことを示せばよい。任意の完全正規直交系 $\{e_n\}_{n\geq 1}, \{e'_n\}_{n\geq 1}$ について、極化等式と(1)を用いると

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1}\left\langle Te_n, Se_n\right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|Te_n + i^k Se_n\right\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\sum_{n\geq 1} i^k \left\|(T + i^k S)e_n\right\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\sum_{n\geq 1} i^k \left\|(T + i^k S)e'_n\right\|^2 \\
&= \sum_{n\geq 1}\left\langle Te'_n, Se'_n\right\rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ。これにより、完全正規直交系の取り方により値が変わらないことが示せた。

したがって、$\langle \bullet, \bullet \rangle$ は well-defined である。

(第二段) $\langle \bullet, \bullet \rangle$ が $C_2(H)$ 上の内積となることを示す。$\langle \bullet, \bullet \rangle$ の定義から、$\langle T, T\rangle \geq 0$ および $\langle \bullet, \bullet \rangle$ の線形性、共役性が成り立つことが分かる。よって、$\langle T, T\rangle = 0 \Rightarrow T = 0$ であることを示せばよい。実際、$\langle T, T\rangle = \sum_{n\geq 1}\|Te_n\|^2 = 0$ より、各 n について、$Te_n = 0$ となる。したがって、任意の $x \in H$ について、$Tx = \sum_{n\geq 1}\langle x, e_n\rangle Te_n = 0$ が成り立つので $T = 0$ が成り立つ。

(第三段) $\langle \bullet, \bullet \rangle$ から導かれるノルムについて、$C_2(H)$ が完備であることを示す。任意の Cauchy 列 $\{T_n\}_{n\geq 1} \subset C_2(H)$ を取り固定する。また、任意の正の数 ε をとり固定する。このとき、

$$\sup_{n,m\geq N}\|T_n - T_m\|^2 \leq \varepsilon$$

を満たす自然数 N が存在する。よって、各 $n, m \geq N$ について、

$$\sum_{k\geq 1}\|(T_n - T_m)e_k\|^2 \leq \varepsilon$$

が成り立つ。$\|\bullet\|_\infty$ を通常の作用素ノルムとすると、$\|\bullet\|_\infty \leq C\|\bullet\|$ が成り立つので $\{T_n\}_{n\geq 1}$ は $B(H)$ の中の Cauchy 列でもある。$B(H)$ は通常の作用素ノルムについて完備であるから

$$T_n \to T \ \text{ in } \ \|\bullet\|_\infty$$

となる $T \in B(H)$ が存在する。この T が $C(H)$ に属することを示す。$\{T_n\}_{n\geq 1}$ は $\|\bullet\|$ の中でも有界だから、$\sum_{k=1}^{K}\|T_n e_k\| \leq M(\forall K)$ となる正の数 M が存在する。ここで、$n \to \infty$ とすると、

$$\sum_{k=1}^{K}\|Te_k\| \leq M(\forall K)$$

が成り立つ。したがって、$\sum_{k\geq 1}\|Te_k\| \leq M$ が成り立ち、$T \in C_2(H)$ が示される。同じ方法で

$$T_n \to T \ \text{ in } \ \|\bullet\|$$

も示す。$\sum_{k=1}^{K}\|(T_n - T_m)e_k\| \leq \varepsilon(\forall K \in \mathrm{N}, m, n \geq N)$ が成り立つので $n \to \infty$ とすると、

$$\sum_{k=1}^{K}\|(T - T_m)e_k\| \leq \varepsilon(\forall K \in \mathrm{N}, m \geq N)$$

が成り立つ。したがって、$\sum_{k\geq 1}\|(T - T_m)e_k\| \leq \varepsilon(\forall m \geq N)$ が成り立つ。これにより

$$T_n \to T \ \text{ in } \ \|\bullet\|$$

が成り立つことが示される。

したがって、Cauchy 列が収束列になったので $C_2(H)$ が完備であることが示された。