問 39(射影空間の問題)
【解説】
多様体上の極値問題。多様体論というのは最初は定義ばかりで、何がどう役に立つかが見えにくい、という問題がある。この問題はその問題を解決するものだと個人的に思っている。ベタにやる方法もあるが、わかりやすい多様体から考えることにより、めんどくさい微分の計算を回避することができたりする…というのを示すいい例だったり。
この解答は「多様体の基礎」、「二次形式を理解している人」を対象に作成した。

【解答】
S^2 から RP^3 への全射な可微分写像 π を $\pi(x_1, x_2, x_3) \equiv [x_1 : x_2 : x_3]$ とする。 f の極値問題を解くことは、 $f \circ \pi$ の極値問題を解くのと同値である。S^2 の性質から $f \circ \pi(x_1, x_2, x_3)$ $= x_1^2 + x_2 x_3 - x_3^2$ となる。これより、S^2 上の関数 $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3 - x_3^2$ の極値問題を解けば、 RP^3 上の極値問題も解けることがわかる。

以下、 $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3 - x_3^2$ の極値問題を解く。 g は二次形式の形をしているので、

$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと、$g(x_1, x_2, x_3) = \langle Ax, x \rangle (x = (x_1, x_2, x_3))$ となる。これより、g の最大値は、 A の固有値の中で最大のもの $\lambda_{\max}$ で、 x が $\lambda_{\max}$ についての単位固有ベクトルとき g の最大値を取る。同様に g の最小値は A の固有値の中で最小のもの $\lambda_{\min}$ で、x が $\lambda_{\min}$ についての単位固有ベクトルとき g の最小値を取る。

A の固有値は $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$ となるので、 $\lambda_{\max} = 1, \lambda_{\min} = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$ となる。また、 $\lambda_{\max}$ についての単位固有ベクトルは $x = (\pm 1, 0, 0)$ である。 $\lambda_{\min}$ についての単位固有ベクトルは

$$x = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$$ である。

したがって、
・$[x_1 : x_2 : x_3] = [1 : 0 : 0]$ のとき、 f は最大値 1 を取る。
・$[x_1 : x_2 : x_3] = \left[0 : \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} : \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right]$ のとき、 f は最小値 $\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$ を取る。