【問題】

$t>0$ とし，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{p}$ を空間ベクトルとする。$\left|\overrightarrow{p}\right|<t$ のとき

$$\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}-t\right)^2 \geqq \left(1-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(t^2-\left|\overrightarrow{p}\right|^2\right)$$

が成り立つことを示せ。

また，上式において等号が成り立つのは $\overrightarrow{p}=t\,\overrightarrow{a}$ のときに限ることを証明せよ。

【解法１】

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{p}$ のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned}
&\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}-t\right)^2-\left(1-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(t^2-\left|\overrightarrow{p}\right|^2\right)\\
&=\left(\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|\cos\theta-t\right)^2-\left(1-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(t^2-\left|\overrightarrow{p}\right|^2\right)\\
&=\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{p}\right|^2\cos^2\theta-2t\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|\cos\theta+\cancel{t^2}-\cancel{t^2}+t^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{p}\right|^2-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{p}\right|^2\\
&=-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{p}\right|^2\sin^2\theta-2t\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|\cos\theta+t^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{p}\right|^2\\
&=\left|\overrightarrow{p}\right|^2-2t\left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta\cdot\left|\overrightarrow{p}\right|+t^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{p}\right|^2\sin^2\theta\\
&=\left(\left|\overrightarrow{p}\right|-t\left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta\right)^2-t^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2\cos^2\theta+t^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{p}\right|^2\sin^2\theta\\
&=\left(\left|\overrightarrow{p}\right|-t\left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta\right)^2+t^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2\sin^2\theta-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{p}\right|^2\sin^2\theta\\
&=\left(\left|\overrightarrow{p}\right|-t\left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta\right)^2+\left|\overrightarrow{a}\right|^2\sin^2\theta\left(t^2-\left|\overrightarrow{p}\right|^2\right)\\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

この等号が成立するのは，$\left|\overrightarrow{p}\right|=t\left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta$ かつ $\left|\overrightarrow{a}\right|\sin\theta=0$ のとき。後者の条件から，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ または $\theta=0,\pi$ となる。$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ ならば，前者の条件から $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{0}$ となるので，$\overrightarrow{p}=t\,\overrightarrow{a}$ は成立する。

次に，$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$ の場合を考える。

$\theta=0$ のとき，$\left|\overrightarrow{p}\right|=t\left|\overrightarrow{a}\right|$ となるが，$\theta=0$ より $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{p}$ は同じ向きなので $\overrightarrow{p}=t\,\overrightarrow{a}$ が成り立つ。

$\theta=\pi$ のとき，$\left|\overrightarrow{p}\right|=-t\left|\overrightarrow{a}\right|<0$ となり不適。

以上より，等号が成立するのは $\overrightarrow{p}=t\,\overrightarrow{a}$ のときに限る。 ■

【解法２】

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{p}$ のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned}
&\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}-t\right)^2-\left(1-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(t^2-\left|\overrightarrow{p}\right|^2\right)\\
&=\left(\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|\cos\theta-t\right)^2-\left(1-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(t^2-\left|\overrightarrow{p}\right|^2\right)\\
&=\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{p}\right|^2\cos^2\theta-2t\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|\cos\theta+\cancel{t^2}-\cancel{t^2}+t^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{p}\right|^2-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{p}\right|^2\\
&=-\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{p}\right|^2\sin^2\theta-2t\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|\cos\theta+t^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{p}\right|^2\\
&\geqq -\left|\overrightarrow{a}\right|^2t^2\sin^2\theta-2t\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|\cos\theta+t^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{p}\right|^2\\
&=t^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2\cos^2\theta-2t\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|\cos\theta+\left|\overrightarrow{p}\right|^2\\
&=\left(t\left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta-\left|\overrightarrow{p}\right|\right)^2\\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

１つ目の等号は，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ または $\theta=0,\pi$ のときに成立する。２つ目の等号は，$\left|\overrightarrow{p}\right|=t\left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta$ のときに成立する。

この２つの等号が同時に成立するとする。

$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ のとき，$\left|\overrightarrow{p}\right|=t\left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta=0$ となるので $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{0}$ となり，従って $\overrightarrow{p}=t\,\overrightarrow{a}$ は成り立つ。

次に，$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ の場合を考える。

$\theta = 0$ のとき，$\left|\overrightarrow{p}\right| = t\left|\overrightarrow{a}\right|$ となるが，$\theta = 0$ より $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{p}$ は同じ向きなので $\overrightarrow{p} = t\,\overrightarrow{a}$ が成り立つ。

$\theta = \pi$ のとき，$\left|\overrightarrow{p}\right| = -t\left|\overrightarrow{a}\right| < 0$ となり不適。

以上より，２つの等号が同時に成立するのは $\overrightarrow{p} = t\,\overrightarrow{a}$ のときに限る。 ■

【解法３】

示すべき式の両辺を $t^2(>0)$ で割り，$\overrightarrow{b} = \dfrac{1}{t}\overrightarrow{p}$ とおくと，示すべき命題は，

$$\left|\overrightarrow{b}\right| < 1 \ \Rightarrow\ \left(1 - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2 \geqq \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(1 - \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)$$

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2 - \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(1 - \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)\\
&= \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta\right)^2 - \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(1 - \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)\\
&= \cancel{1} - 2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta + \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\cos^2\theta - \cancel{1} + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\\
&= -2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\sin^2\theta + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{b}\right|^2\\
&= \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\sin^2\theta - 2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta + \left|\overrightarrow{a}\right|^2\\
&= \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta\cdot\left|\overrightarrow{b}\right| + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\sin^2\theta\\
&= \left(\left|\overrightarrow{b}\right| - \left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta\right)^2 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\cos^2\theta + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\sin^2\theta\\
&= \left(\left|\overrightarrow{b}\right| - \left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta\right)^2 + \left|\overrightarrow{a}\right|^2\sin^2\theta - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\sin^2\theta\\
&= \left(\left|\overrightarrow{b}\right| - \left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta\right)^2 + \left|\overrightarrow{a}\right|^2\sin^2\theta\left(1 - \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)\\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

この等号が成立するのは，$\left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta$ かつ $\left|\overrightarrow{a}\right|\sin\theta = 0$ のとき。後者の条件から，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ または $\theta = 0, \pi$ となる。$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ならば，前者の条件から $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ となるので，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$ は成立する。

次に，$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ の場合を考える。

$\theta = 0$ のとき，$\left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right|$ となるが，$\theta = 0$ より $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は同じ向きなので $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$ が成り立つ。

$\theta = \pi$ のとき，$\left|\overrightarrow{b}\right| = -\left|\overrightarrow{a}\right| < 0$ となり不適。

以上より，等号が成立するのは $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$ のときに限る。 ■

【解法４】

示すべき式の両辺を $t^2(>0)$ で割り，$\overrightarrow{b} = \dfrac{1}{t}\overrightarrow{p}$ とおくと，示すべき命題は，

$$\left|\overrightarrow{b}\right| < 1 \ \Rightarrow\ \left(1 - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2 \geqq \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(1 - \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)$$

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2 - \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(1 - \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)\\
&= \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta\right)^2 - \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(1 - \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)\\
&= \cancel{1} - 2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta + \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\cos^2\theta - \cancel{1} + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\\
&= -2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\sin^2\theta + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{b}\right|^2\\
&\geqq -2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\sin^2\theta + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{b}\right|^2\\
&= -2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta + \left|\overrightarrow{a}\right|^2\cos^2\theta + \left|\overrightarrow{b}\right|^2
\end{aligned}$$

$= \left(\left|\overrightarrow{b}\right| - \left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta\right)^2$

$\geqq 0$

１つ目の等号は，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ または $\theta = 0, \pi$ のときに成立する。２つ目の等号は，$\left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta$ のときに成立する。

この２つの等号が同時に成立するとする。

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ のとき，$\left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta = 0$ となるので $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ となり，従って $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$ が成り立つ。

次に，$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ の場合を考える。

$\theta = 0$ のとき，$\left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right|$ となるが，$\theta = 0$ より $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は同じ向きなので $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$ が成り立つ。

$\theta = \pi$ のとき，$\left|\overrightarrow{b}\right| = -\left|\overrightarrow{a}\right| < 0$ となり不適。

以上より，２つの等号が同時に成立するのは $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$ のときに限る。 ■

【解法５】

示すべき式の両辺を $t^2(> 0)$ で割り，$\overrightarrow{b} = \dfrac{1}{t}\overrightarrow{p}$ とおくと，示すべき命題は，

$$\left|\overrightarrow{b}\right| < 1 \ \Rightarrow \ \left(1 - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2 \geqq \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(1 - \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)$$

$\left|\overrightarrow{a}\right| > 1$ のときは右辺は負となるので，この式は確かに成立する。従って，以下 $\left|\overrightarrow{a}\right| \leqq 1$ の場合を扱う。

コーシー・シュワルツの不等式より $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \leqq \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|$ である。よって，

$$1 - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \geqq 1 - \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|$$

$\left|\overrightarrow{a}\right| \leqq 1$，$\left|\overrightarrow{b}\right| < 1$ より，この両辺はともに非負であるので，２乗しても大小関係は変わらず，

$$\begin{aligned}\left(1 - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2 &\geqq \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\right)^2 \\ &= 1 - 2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| + \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2 \\ &\geqq 1 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2 - \left|\overrightarrow{b}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2 \quad (\because \text{相加相乗平均}) \\ &= \left(1 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2\right)\left(1 - \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)\end{aligned}$$

等号が成立するのは，コーシー・シュワルツの不等式の等号成立条件である「$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が同じ向きに平行」と，相加相乗平均の等号成立条件である $\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right|$ が同時に成立するとき。つまり，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$ のときであるので，題意は示された。 ■