目次

この文書では通常精錬のみを扱う．すなわちホワイトスミスの武器精錬や課金アイテムを使った精錬は扱わない．内容は jRO，iRO に共通する（精錬手数料のみ異なる）．

防具を未精錬から +5 まで精錬する時の期待値

防具の個数

$+4$ から $+5$ への成功率を p $(0 < p < 1)$ とする．

解 1

1 回目で成功した場合，その確率は p，消費した防具は 1 個．
2 回目で成功した場合，その確率は $(1-p)p$，消費した防具は 2 個．
3 回目で成功した場合，その確率は $(1-p)^2p$，消費した防具は 3 個．
n 回目で成功した場合，その確率は $(1-p)^{n-1}p$，消費した防具は n 個．

となるので，防具の個数の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= p\cdot 1 + (1-p)p\cdot 2 + (1-p)^2p\cdot 3 + \cdots + (1-p)^{n-1}pn + \cdots \\ &= p + 2p(1-p) + 3p(1-p)^2 + \cdots + np(1-p)^{n-1} + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

となる．$E = \lim_{n\to\infty} E(n)$，$1-p = r$ とおくと（$0 < r < 1$ に注意），

$$E(n) = p(1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1})$$

となるが，証明 1 により

$$\lim_{n\to\infty} E(n) = \frac{p}{(1-r)^2}$$

となるので，

$$E = \frac{p}{(1-r)^2} = \frac{p}{\bigl(1-(1-p)\bigr)^2} = \frac{1}{p}$$

$p = 0.6$ を代入すると

$$E = \frac{1}{0.6} = \frac{5}{3} = 1.66\cdots$$

ゆえに防具の個数の期待値は約 1.66 個となる．

■**証明 1**　$|r|<1$ の時,

$$\lim_{n\to\infty} E(n) = \lim_{n\to\infty} p(1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}) = \frac{p}{(1-r)^2}$$

を示す.

$$\begin{aligned} E(n) &= p(1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}) \\ rE(n) &= p\bigl(r+2r^2+3r^3+\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n\bigr) \end{aligned}$$

辺々引くと

$$(1-r)E(n) = p(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}-nr^n)$$

ここで

$$1+r+r^2+\cdots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

より

$$\begin{aligned} (1-r)E(n) &= p\left(\frac{1-r^n}{1-r} - nr^n\right) \\ E(n) &= p\left(\frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{(1-r)}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $|r|<1$ の時, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であるから（証明 2),

$$\lim_{n\to\infty} E(n) = \frac{p}{(1-r)^2}$$

■**証明 2**　$|r|<1$ の時, $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ を示す.

　$r=0$ の時は明らか.

　$r\neq 0$ の時, $|r| = \dfrac{1}{1+h}$ $(h>0)$ とおくと

$$(1+h)^n \geqq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2 > \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

が成り立つので（証明 3),

　$n\to\infty$ の時,

$$0 < n|r|^n = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{2n}{n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2} \to 0$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} n|r|^n = 0$

ここで，$-|a_n| \leqq a_n \leqq |a_n|$ より，

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

を利用すると（逆も成り立つ），

$$\lim_{n\to\infty} n|r|^n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} nr^n = 0$$

■証明 3　n を自然数，$h > 0$ の時，

$$(1+h)^n \geqq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

を帰納法で示す．

左辺を $f(n)$，右辺を $g(n)$ とする．

$n = 1$ の時，$f(1) = 1 + h$ ，$g(1) = 1 + h$ より $f(1) = g(1)$ が成り立つ．

$n = k$ の時，$f(k) \geqq g(k)$ が成り立つと仮定すると，

$$f(k+1) = (1+h)f(k) \geqq (1+h)g(k) = (1+h)\left(1 + kh + \frac{k(k-1)}{2}h^2\right)$$

ここで

$$\begin{aligned}
&(1+h)\left(1 + kh + \frac{k(k-1)}{2}h^2\right) \\
&= 1 + kh + \frac{k(k-1)}{2}h^2 + h + kh^2 + \frac{k(k-1)}{2}h^3 \\
&= 1 + (k+1)h + \frac{k(k+1)}{2}h^2 + \frac{k(k-1)}{2}h^3 \\
&= g(k+1) + \frac{k(k-1)}{2}h^3
\end{aligned}$$

と変形できるので，

$$f(k+1) \geqq g(k+1) + \frac{k(k-1)}{2}h^3$$

が成り立つ．

$h > 0$，k は自然数であるから $\dfrac{k(k-1)}{2}h^3 \geqq 0$（等号は $k = 1$ の時）．

ゆえに，

$$f(k+1) \geqq g(k+1) + \frac{k(k-1)}{2}h^3 \geqq g(k+1)$$

よって $n = k + 1$ の時も成り立つ．

以上より $f(n) \geqq g(n)$ が示された．

■証明 3 の別解　$n=2$ の時，$f(2)=1+2h+h^2$, $g(2)=1+2h+h^2$ より $f(2)=g(2)$ が成り立つ．

$n \geqq 3$ の時，二項定理を用いると

$$
\begin{aligned}
(1+h)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 h + {}_n\mathrm{C}_2 h^2 + {}_n\mathrm{C}_3 h^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n \\
(1+h)^n &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + {}_n\mathrm{C}_3 h^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n \\
f(n) &= g(n) + {}_n\mathrm{C}_3 h^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n
\end{aligned}
$$

なお，$n \geqq m \geqq 3$ を満たす任意の自然数 m に対し，${}_n\mathrm{C}_m \geqq 1$, $h^m > 0$ が成り立つので，

$$
{}_n\mathrm{C}_3 h^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n > 0
$$

も成り立つ．したがって，

$$
f(n) - g(n) = {}_n\mathrm{C}_3 h^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n > 0
$$

以上より $f(n) \geqq g(n)$ が示された（等号は $n=1,2$ の時）．

■証明 1 の別解

$$
E(n) = p(1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1})
$$

の r を関数とみなし，微分を用いると

$$
\begin{aligned}
E(n) &= p\big((r)' + (r^2)' + (r^3)' + \cdots + (r^n)'\big) \\
&= p(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n)' \\
&= p\left(\frac{r(1-r^n)}{1-r}\right)' \\
&= \frac{p}{(1-r)^2} \cdot \Big(\big(r(1-r^n)\big)'(1-r) - r\big(1-r^n\big)(1-r)'\Big) \\
&= \frac{p}{(1-r)^2} \cdot \Big(\big((1-r^n) + r(-nr^{n-1})\big)(1-r) - r(1-r^n)\cdot(-1)\Big) \\
&= \frac{p\big(1-(n+1)r^n + nr^{n+1}\big)}{(1-r)^2} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

この式 (3) は 3 ページの式 (2) と同じである．

解 2

防具の個数の期待値を E とする．

1 回目で成功した場合，その確率は p，消費した防具は 1 個．

1 回目で失敗した場合，その確率は $1-p$，この時消費した防具は 1 個，
成功するために追加で E 個必要になるので，防具は合計 $1+E$ 個になる．

以上より防具の個数の期待値は

$$E = p \cdot 1 + (1-p)(1+E)$$

これを解くと $E = \dfrac{1}{p}$ を得る．

エルニウムの個数・精錬手数料

エルニウムの個数の期待値は防具の 5 倍なので，

$$5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3} = 8.33\cdots$$

ゆえに約 8.33 個となる．

精錬手数料はエルニウムの個数に手数料を掛ければ良い．

付記

高校数学レベルの知識で丁寧に解いてみました（筆者も大学初級レベルの知識しか無いが）．この問題は

「サイコロを 1 の目が出るまで振り続ける回数の期待値」

「コインを表が出るまで投げ続ける回数の期待値」

とほぼ同じなので，以下の知恵袋系サイトが役立ちました．

サイコロを振る回数の期待値が解らず，困っています．

http://okwave.jp/qa/q5163236.html

サイコロで初めて 1 が出る．その時の平均回数は？期待値？

http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1012646540

サイコロを 6 が出るまで振り続けるとき，振る回数の期待値を求めよ.
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1340832113

防具を未精錬から +6 まで精錬する時の期待値

防具の個数

+4 から +5 への成功率を p_5，+5 から +6 への成功率を p_6 とする.
$0 < p_5$, $p_6 < 1$ に注意する.

解 1

1 回目で成功した場合，その確率は p_5p_6，消費した防具は 1 個.
2 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_5p_6)p_5p_6$，消費した防具は 2 個.
3 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_5p_6)^2p_5p_6$，消費した防具は 3 個.
n 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_5p_6)^{n-1}p_5p_6$，消費した防具は n 個.

となるので，防具の個数の期待値 E_6 は
2 ページの式 (1) で $p_5p_6 = p$ と置換したものと等しい.
$0 < p_5p_6 < 1$ に注意すると，$E_6 = \dfrac{1}{p_5p_6}$
$p_5 = 0.6$, $p_6 = 0.4$ を代入すると

$$E_6 = \frac{1}{0.6 \cdot 0.4} = \frac{25}{6} = 4.16\cdots$$

ゆえに防具の個数の期待値は約 4.16 個となる.

解 2

+5 防具が完成したものとして，+5 防具を +6 に精錬する.
+5 防具の個数の期待値は $E_5 = \dfrac{1}{p_5}$ であるから，

1 回目で成功した場合，その確率は p_6，消費した防具は E_5 個.
2 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_6)p_6$，消費した防具は $2E_5$ 個.
3 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_6)^2p_6$，消費した防具は $3E_5$ 個.
n 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_6)^{n-1}p_6$，消費した防具は nE_5 個.

となるので，+6 防具の個数の期待値 $E_6 = \dfrac{E_5}{p_6} = \dfrac{1}{p_5 p_6}$

解 3

1 回目で成功した場合，その確率は $p_5 p_6$，消費した防具は 1 個.

1 回目で失敗した場合，その確率は $1 - p_5 p_6$，この時消費した防具は 1 個，
成功するために追加で E_6 個必要になるので，防具は合計 $1 + E_6$ 個になる.

以上より

$$E_6 = p_5 p_6 \cdot 1 + (1 - p_5 p_6)(1 + E_6)$$

これを解くと $E_6 = \dfrac{1}{p_5 p_6}$ を得る.

解 4

+5 防具が完成したものとして，+5 防具を +6 に精錬する.

1 回目で成功した場合，その確率は p_6，消費した防具は E_5 個.

1 回目で失敗した場合，その確率は $1 - p_6$，この時消費した防具は E_5 個，
成功するために追加で E_6 個必要になるので，防具は合計 $E_5 + E_6$ 個になる.

以上より

$$E_6 = p_6 E_5 + (1 - p_6)(E_5 + E_6)$$

これを解くと $E_6 = \dfrac{E_5}{p_6}$ を得る.

エルニウムの個数・精錬手数料

解 1

1 回目で成功した場合，その確率は $p_5 p_6$，消費したエルニウムは 6 個.

2 回目で成功した場合，その確率は $(1 - p_5 p_6) p_5 p_6$，1 回目は失敗することになるが，

1 回目 +5 で失敗した時の確率は $1 - p_5$，この時消費したエルニウムは 5 個.

1 回目 +6 で失敗した時の確率は $p_5(1-p_6)$，この時消費したエルニウムは 6 個.

2 回目 +6 で成功するので確率は p_5p_6，この時消費したエルニウムは 6 個.

よってエルニウムは 11 個または 12 個になるが，正確には

$$\frac{(1-p_5)\cdot 5+p_5(1-p_6)\cdot 6}{1-p_5+p_5(1-p_6)}+6=\frac{5+p_5-6p_5p_6}{1-p_5p_6}+6$$

個になる.

3 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_5p_6)^2p_5p_6$，1〜2 回目は失敗することになるが,

1 回目 +5 で失敗した時の確率は $1-p_5$，この時消費したエルニウムは 5 個.

1 回目 +6 で失敗した時の確率は $p_5(1-p_6)$，この時消費したエルニウムは 6 個.

2 回目 +5 で失敗した時の確率は $1-p_5$，この時消費したエルニウムは 5 個.

2 回目 +6 で失敗した時の確率は $p_5(1-p_6)$，この時消費したエルニウムは 6 個.

3 回目 +6 で成功するので確率は p_5p_6，この時消費したエルニウムは 6 個.

よってエルニウムは 16〜18 個になるが，正確には

$$2\cdot\frac{(1-p_5)\cdot 5+p_5(1-p_6)\cdot 6}{1-p_5+p_5(1-p_6)}+6=2\cdot\frac{5+p_5-6p_5p_6}{1-p_5p_6}+6$$

個になる.

n 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_5p_6)^{n-1}p_5p_6$，エルニウムは

$$(n-1)\frac{(1-p_5)\cdot 5+p_5(1-p_6)\cdot 6}{1-p_5+p_5(1-p_6)}+6=(n-1)\frac{5+p_5-6p_5p_6}{1-p_5p_6}+6$$

個になる.

エルニウムの個数の期待値 E_6' は

$$
\begin{aligned}
E_6' &= p_5p_6 \cdot 6 \\
&\quad +(1-p_5p_6)p_5p_6\left(\frac{5+p_5-6p_5p_6}{1-p_5p_6}+6\right) \\
&\quad +(1-p_5p_6)^2p_5p_6\left(2\cdot\frac{5+p_5-6p_5p_6}{1-p_5p_6}+6\right) \\
&\quad \vdots \\
&\quad +(1-p_5p_6)^{n-1}p_5p_6\left((n-1)\frac{5+p_5-6p_5p_6}{1-p_5p_6}+6\right) \\
&\quad \vdots
\end{aligned}
$$

ここで見通しをよくするため，$1-p_5p_6=a$, $\dfrac{5+p_5-6p_5p_6}{1-p_5p_6}=b$ とおく．
$0<a$, $b<1$ に注意すると，

$$
\begin{aligned}
E_6' &= \lim_{n\to\infty} p_5p_6\left(6+a(b+6)+a^2(2b+6)+\cdots+a^{n-1}((n-1)b+6)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} p_5p_6\left(6+6a+6a^2+\cdots+6a^{n-1}+ab+2a^2b+\cdots+(n-1)a^{n-1}b\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} p_5p_6\left(6(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})+ab(1+2a+\cdots+(n-1)a^{n-2})\right) \\
&= p_5p_6\left(\frac{6}{1-a}+\frac{ab}{(1-a)^2}\right)
\end{aligned}
$$

$p_5p_6=1-a$ であるから，

$$
E_6' = 6+\frac{ab}{p_5p_6} = 6+\frac{5+p_5-6p_5p_6}{p_5p_6} = \frac{5+p_5}{p_5p_6} \tag{4}
$$

$p_5=0.6$, $p_6=0.4$ を代入すると

$$
E_6' = \frac{5+0.6}{0.6\cdot 0.4} = \frac{70}{3} = 23.3\cdots
$$

ゆえにエルニウムの個数の期待値は約 23.3 個となる．

精錬手数料はエルニウムの個数に手数料を掛ければ良い．

解 2

+5 防具が完成したものとして，+5 防具を +6 に精錬する．

+5 防具のエルニウムの期待値を E_5' とすると，$E_5'=\dfrac{5}{p_5}$ であるから，

1 回目で成功した場合，その確率は p_6，消費したエルニウムは $E_5'+1$ 個.

2 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_6)p_6$，消費したエルニウムは $2(E_5'+1)$ 個.

3 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_6)^2p_6$，消費したエルニウムは $3(E_5'+1)$ 個.

n 回目で成功した場合，その確率は $(1-p_6)^{n-1}p_6$，消費したエルニウムは $n(E_5'+1)$ 個.

となるので，

$$E_6' = \frac{E_5'+1}{p_6} \tag{5}$$

この式 (5) は 10 ページの式 (4) と同じである.

解 3

+5 防具が完成したものとして，+5 防具を +6 に精錬する.

1 回目で成功した場合，その確率は p_6，消費したエルニウムは $E_5'+1$ 個.

1 回目で失敗した場合，その確率は $1-p_6$，この時消費したエルニウムは $E_5'+1$ 個，成功するために追加で E_6' 個必要になるので，エルニウムは合計 $E_5'+1+E_6'$ 個になる.

以上より

$$E_6' = p_6(E_5'+1) + (1-p_6)(E_5'+1+E_6')$$

これを解くと $E_6' = \dfrac{E_5'+1}{p_6}$ を得る.

一般化

防具の個数の期待値の漸化式

8 ページの解 4 の方法を一般化すると，

$$E_n = p_nE_{n-1} + (1-p_n)(E_{n-1}+E_n)$$

これを解くと，

$$E_n = \frac{E_{n-1}}{p_n}$$

これは $n \leqq 4$ の時も成り立つ ($E_1 = 1$).

エルニウムの個数の期待値の漸化式

11 ページの解 3 の方法を一般化すると,

$$E'_n = p_n(E'_{n-1} + 1) + (1 - p_n)(E'_{n-1} + 1 + E'_n)$$

これを解くと,

$$E'_n = \frac{E'_{n-1} + 1}{p_n}$$

これは $n \leqq 4$ の時も成り立つ ($E'_1 = 1$).

精錬手数料はエルニウムの個数に手数料を掛ければ良い.

+7 以上の精錬や，武器の精錬も同様に計算できる.

付録

使用アイテム・手数料

	使用アイテム		価格	手数料	
	jRO	iRO		jRO	iRO
武器 Lv1	プラコン	Phracon	200z	100z	50z
武器 Lv2	エンベルタコン	Emveretarcon	1,000z	500z	200z
武器 Lv3	オリデオコン	Oridecon	非売品	5,000z	5,000z
武器 Lv4	オリデオコン	Oridecon	非売品	10,000z	20,000z
防具	エルニウム	Elunium	非売品	5,000z	2,000z

精錬確率表

精錬確率について具体的な数値は jRO，iRO ともに公表されていませんが，以下の成功率が有力とされています[*1]．+4 以下はすべて 100%.

	武器				防具
	Lv1	Lv2	Lv3	Lv4	
+4 → +5	100%	100%	100%	60%	60%
+5 → +6	100%	100%	60%	40%	40%
+6 → +7	100%	60%	50%	40%	40%
+7 → +8	60%	40%	20%	20%	20%
+8 → +9	40%	20%	20%	20%	20%
+9 → +10	20%	20%	20%	10%	10%

[*1] twRO（台湾・香港）や mRO,eRO（シンガポール・マレーシア）では公表されていますが，精錬確率は各 RO で異なるようです.
`http://ro.gameflier.com/guide/armoring3.asp`
`http://ro.gameflier.com/guide/equipment2.asp`
`http://mro.gameflier.com.my/guide/armoring3.asp`
`http://mro.gameflier.com.my/guide/equipment2.asp`