院試 H28

第1問 数学.

I

(1). 固有方程式 $|\lambda E - M| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 = 0$ より

固有値 $\lambda = 2$. 対応する固有ベクトルは. ($\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とすると)

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$ より 規格化して. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

がとれる. これに直交するノルムが1のベクトルは $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるので.

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \therefore \ \underline{U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

(2) 実際に 計算すると.

$$UMU^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 25 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ より.

$$M^n = U^{-1}(UMU^{-1})^n U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & +1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n5\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ +1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \underline{\begin{pmatrix} (n+1)2^n & n2^{n+1} \\ -n2^{n-1} & -(n-1)2^n \end{pmatrix}}.$$

(3) $$\exp M = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M^n}{n!} = U^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(UMU^{-1})^n}{n!}\cdot U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & +1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^2 & 5e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \underline{\begin{pmatrix} 3e^2 & 4e^2 \\ -e^2 & -e^2 \end{pmatrix}}.$$

II.

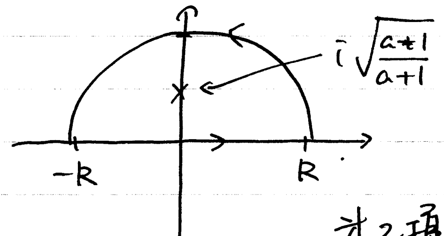
(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$　　$\tan\frac{\theta}{2}=t$ とおくと．$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+t^2}$ かつ $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ より．

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{a+\frac{1-t^2}{1+t^2}}+\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{1+t^2}\frac{1}{a+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(a-1)t^2+(a+1)}$$

$$=\frac{1}{a-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{a-1}{a+1}}\quad -\text{☆}$$

☆を考えるために．

$\displaystyle\frac{1}{a-1}\int_C\frac{dz}{z^2+\frac{a-1}{a+1}}$ を以下の積分経路で考える．



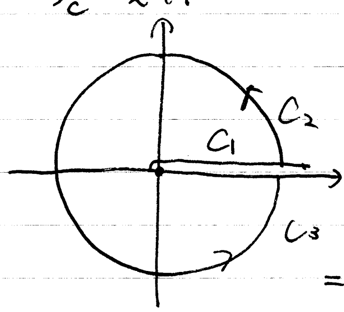
$$\frac{1}{a-1}\int_C\frac{dz}{z^2+\frac{a+1}{a-1}}=\frac{1}{a-1}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+\frac{a+1}{a-1}}+\frac{1}{a-1}\int_0^{\pi}\frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^2e^{2i\theta}+\frac{a+1}{a-1}}$$

$$=\frac{1}{a-1}\,2\pi i\cdot\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

第2項は $R\to\infty$ で消えるので

$$\frac{1}{a-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+\frac{a+1}{a-1}}=\underline{\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}}.$$

(2) $\displaystyle\int_C\frac{(-z)^{\alpha-1}}{z+1}dz$ を以下の積分経路で積分する．ここで $(-z)^{\alpha-1}$ は主値をとる．



$$\int_C\frac{(-z)^{\alpha-1}}{z+1}dz=\int_0^R\frac{e^{-(\alpha-1)i\pi}x^{\alpha-1}}{x+1}dx+\int_0^{2\pi}\frac{(Re^{i\theta})^{\alpha-1}}{Re^{i\theta}+1}Re^{i\theta}d\theta-\int_0^R\frac{e^{(\alpha-1)i\pi}x^{\alpha-1}}{x+1}dx$$

$$=2i\sin\alpha\pi\int_0^R\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx+\int_0^{2\pi}\frac{(Re^{i\theta})^{\alpha-1}}{Re^{i\theta}+1}Re^{i\theta}d\theta$$

$$=2\pi i$$

第2項は $R\to\infty$ で消えるので．

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx=\underline{\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}}.$$

III. $z=\sin\theta$ とすると. $\dfrac{d}{dz}=\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{d}{d\theta}$, $\dfrac{d^2}{dz^2}=\dfrac{1}{\cos\theta}\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\dfrac{d}{d\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{d^2}{d\theta^2}\right)$ となり.

与えられた方程式は.

$$\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}\left(\cancel{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\frac{d}{d\theta}}+\frac{1}{\cos\theta}\frac{d^2}{d\theta^2}\right)y-\cancel{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{dy}{d\theta}}+p^2y=0.$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{d^2y}{d\theta^2}+p^2y=0 \qquad \therefore\ y=Ae^{ip\theta}+Be^{-ip\theta}$$

$$=\underline{Ae^{ip\,\mathrm{Arcsin}\,z}+Be^{-ip\,\mathrm{Arcsin}\,z}}.$$

IV.

(1) $F(1)=1$, $F(x)=-1+3x$, $F(x^2)=1-6x+9x^2$ より.

表現行列を A_F として.

$$(F(1),\ F(x)\ F(x^2))=(1\ x\ x^2)A_F=(1\ x\ x^2)\underline{\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&3&-6\\0&0&9\end{pmatrix}}.$$

(2) G_α の表現行列は $A_{G_\alpha}=\begin{pmatrix}-a&0&0\\0&1-a&2\\0&0&2-a\end{pmatrix}$ (ただし基底は $\{1, x, x^2\}$).

よって $\mathrm{Ker}\,G_\alpha=\mathrm{Ker}\,A_{G_\alpha}\geqq 1$ となるには $\det A_{G_\alpha}=0$.

$\det A_{G_\alpha}=-a(1-a)(2-a)=0$ より $\underline{a=0, 1, 2}$.

$\underline{a=0\text{ のとき}}$

$A_{G_{\alpha=0}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$ より. $\underline{\mathrm{Ker}\,G_{\alpha=0}=\{c\mid c\in\mathbb{C}\}}$.

$\underline{a=1\text{ のとき}}$

$A_{G_{\alpha=1}}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ より. $\underline{\mathrm{Ker}\,G_{\alpha=1}=\{bx\mid b\in\mathbb{C}\}}$

$\underline{a=2\text{ のとき}}$

$A_{G_{\alpha=2}}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ より $\underline{\mathrm{Ker}\,G_{\alpha=2}=\{ax^2+2ax\mid a\in\mathbb{C}\}}$.

第2問 物理学(1).

I

(1) $[a, a^\dagger] = 1$. かつ $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ であるから.

$\hat{q} = \dfrac{a+a^\dagger}{2\alpha}$, $\hat{p} = \dfrac{a-a^\dagger}{2i\beta}$ を用いて.

$$\langle \hat{q} \rangle_n \equiv \langle n|\hat{q}|n\rangle = \langle n| \frac{a+a^\dagger}{2\alpha}|n\rangle = \underline{0}$$

$$\langle \hat{p} \rangle_n \equiv \langle n|\hat{p}|n\rangle = \langle n| \frac{a-a^\dagger}{2i\beta}|n\rangle = \underline{0}$$

(2) $\left\{(\Delta\hat{q}+i\lambda\Delta\hat{p})|\psi\rangle\right\}^\dagger(\Delta\hat{q}+i\lambda\Delta\hat{p})|\psi\rangle \geqq 0$ であるから.

$$(\text{左辺}) = \langle\psi|(\Delta\hat{q}-i\lambda\Delta\hat{p})(\Delta\hat{q}+i\lambda\Delta\hat{p})|\psi\rangle$$

$$= (\delta\hat{q})^2 - \hbar\lambda\langle\psi|\psi\rangle + \lambda^2(\delta\hat{p})^2 \geqq 0. \quad \text{for } {}^\forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

よって. (左辺の判別式) $= \hbar^2\langle\psi|\psi\rangle^2 - 4(\delta\hat{q})^2(\delta\hat{p})^2 \leqq 0$

$$\therefore\ (\delta\hat{q})^2(\delta\hat{p})^2 \geqq \frac{\hbar^2}{4}\langle\psi|\psi\rangle^2$$

よって 規格化すれば $(\delta\hat{q})^2(\delta\hat{p})^2 \geqq \dfrac{\hbar^2}{4}$ を得る.

(3) $\Delta\hat{q}_n \equiv \hat{q} - \langle n|\hat{q}|n\rangle = \hat{q}$. $\Delta\hat{p}_n \equiv \hat{p} - \langle n|\hat{p}|n\rangle = \hat{p}$

$(\Delta\hat{q}_n)^2 = \hat{q}^2 = \dfrac{1}{4\alpha^2}(a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + a^{\dagger 2}) = \dfrac{1}{4\alpha^2}(a^2 + a^{\dagger 2} + 2\hat{n} + 1)$ より.

$(\delta q_n)^2 = \dfrac{1}{4\alpha^2}\langle n|(a^2 + a^{\dagger 2} + 2\hat{n} + 1)|n\rangle = \dfrac{2n+1}{4\alpha^2}$. 同様に.

$(\delta p_n)^2 = -\dfrac{1}{4\beta^2}\langle n|(a^2 + a^{\dagger 2} - 2n - 1)|n\rangle = \dfrac{2n+1}{4\beta^2}$ より.

$$(\delta q_n)^2(\delta p_n)^2 = \frac{(2n+1)^2}{16\alpha^2\beta^2} = (2n+1)^2\frac{\hbar^2}{4}.$$

従って $n=0$; 基底状態のとき. 最小波束が実現される.

Ⅱ

(4) $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n(0)|n\rangle$ とかける。

シュレディンガー方程式より。 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$

これを解いて。

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$$ これに(1)式を代入して。

$$\sum_n c_n(t)|n\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\sum_n c_n(0)|n\rangle = \sum_n e^{-iE_nt/\hbar}c_n(0)|n\rangle$$

$\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ は正規直交基底なので。 $c_n(t) = \underline{e^{-iE_nt/\hbar}c_n(0)}$.

(5) $$|\psi(0)\rangle = \frac{|2\rangle+|5\rangle+|8\rangle}{\sqrt{3}}$$

(4)から。 $$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i2\Omega t}|2\rangle + e^{-i5\Omega t}|5\rangle + e^{-i8\Omega t}|8\rangle}{\sqrt{3}}$$

$$= e^{-i8\Omega t}\frac{e^{i6\Omega t}|2\rangle + e^{i3\Omega t}|5\rangle + |8\rangle}{\sqrt{3}}$$

全てのオブザーバブルの期待値が等しくなるには。これが $|\psi(0)\rangle$ と位相のずれのみが許される。

$\therefore$ $6\Omega t = 2m\pi$ かつ $3\Omega t = 2n\pi$

よって $t_{min} = \underline{\frac{2\pi}{3\Omega}}$.

Ⅲ.

(6) Schrödinger方程式は。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_h}\vec{\nabla}_h^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e}\vec{\nabla}_e^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{|\vec{r}_e-\vec{r}_h|}\right)\Psi(\vec{r}_h,\vec{r}_e) = E_{tot}\Psi(\vec{r}_h,\vec{r}_e) \quad \text{—①}$$

$$\Psi(\vec{r}_h,\vec{r}_e) = \phi(\vec{r}_{cm})\psi(\vec{r}_{rel}) \quad \left\{\begin{array}{l}\vec{r}_{cm} = \dfrac{m_e\vec{r}_e + m_h\vec{r}_h}{m_e+m_h} \\ \vec{r}_{rel} = \vec{r}_e - \vec{r}_h\end{array}\right.$$

と変数分離すると。①は

$$\left\{\begin{array}{ll}\left(-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_{rel}^2 - \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{|\vec{r}_{rel}|}\right)\psi(\vec{r}_{rel}) = E_{rel}\psi(\vec{r}_{rel}) & \mu = \left(\dfrac{1}{m_e}+\dfrac{1}{m_h}\right)^{-1} \\ -\dfrac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_{cm}^2\phi(\vec{r}_{cm}) = E_{cm}\phi(\vec{r}_{cm}) & M = m_e+m_h\end{array}\right.$$

となる。

ここで上の式は(8)の形をしているため、基底状態のエネルギー E_1^{rel} と波動関数 $\psi_1^{rel}(\vec{r})$ は、

$$E_1^{rel} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0\tilde{a}}, \quad \psi_1^{rel}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tilde{a}^3}} e^{-\frac{r}{\tilde{a}}} \qquad \tilde{a} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2}\frac{m_a+m_e}{m_a m_e}.$$

束縛エネルギーは

$$|E_1^{rel}| = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0\tilde{a}}.$$

(7). $$\langle r\rangle = \int d^3x\, \psi_1^{rel*}(\vec{r})\, r\, \psi_1^{rel}(\vec{r}) = \frac{3}{2}\tilde{a} = \frac{6\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2}\frac{m_a+m_e}{m_a m_e}.$$

(8). 実際の基底状態を $\begin{cases} E_1 \\ |\psi_1\rangle \end{cases}$ で表して、

$$E_1 = E_1^{rel} + \lambda E_1^{rel(1)} + \lambda^2 E_1^{rel(2)} + \cdots$$
$$|\psi_1\rangle = |\psi_1^{rel}\rangle + \lambda|\psi_1^{rel(1)}\rangle + \lambda^2|\psi_1^{rel(2)}\rangle + \cdots$$
と展開。

このとき $$E_1^{rel(1)} = \langle\psi_1^{rel}|\delta(\vec{r})|\psi_1^{rel}\rangle = \int d^3x\, \psi_1^{rel*}(r)\,\delta(\vec{r})\,\psi_1^{rel}(r)$$

ここで $\delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$ を用いて → $$= \int_0^\infty dr\, \delta(r) e^{-\frac{2r}{\tilde{a}}} \cdot \frac{1}{\pi\tilde{a}^3}$$

$$= \frac{1}{2\pi\tilde{a}^3}.$$

(9) ~~Erel~~ $\frac{E_1^{rel}}{E_1} = \frac{a}{\tilde{a}} \simeq \frac{1}{25}$ より、

$E_1^{rel} \simeq -\frac{1}{25}\cdot 14\,\mathrm{eV} = -5.6\times10^{-1}\,\mathrm{eV}$. (束縛エネルギー) $= 5.6\times10^{-1}\,\mathrm{eV}$.

$\langle r\rangle \simeq 25\times\frac{3}{2}\times5\times10^{-11}\,\mathrm{m} \simeq 1.9\times10^{-9}\,\mathrm{m}$.

第3問 物理学(2).

I

(1) $\dfrac{dV}{V} = \alpha dT - k_T dp$ より. $-k_T = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ ∴ $\underline{k_T = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_T}$.

(2) $\alpha = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \dfrac{1}{V}\cdot\dfrac{Nk_B}{p} = \dfrac{Nk_B}{pV} = \dfrac{\cancel{Nk_B}}{R}\cdot\dfrac{R}{\cancel{Nk_B}T} = \underline{\dfrac{1}{T}}$.

$k_T = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{Nk_BT}{p}\right) = \dfrac{Nk_BT}{p^2V} = \dfrac{\cancel{Nk_BT}}{p^{\cancel{2}}}\cdot\dfrac{R}{\cancel{Nk_BT}} = \underline{\dfrac{1}{p}}$.

(3) $dU = -pdV + d'Q$

また、$U(T,V)$として. $dU = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$

$d'Q = dU + pdV = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left\{\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right\} dV$

定積比熱では $V=\mathrm{const}$ i.e. $dV=0$より.

$C_V = \left(\dfrac{d'Q}{dT}\right)_V = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. ―①

次に $V(p,T)$ と考えて. $p=\mathrm{const}$ では $dV = \left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT$.

$$\therefore\ d'Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT$$

$$= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right] dT.$$

$$\therefore\ \left(\frac{d'Q}{dT}\right)_p = C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

よって □に入るのは $\underline{\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T}$.

(4). $C_p - C_V = T\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p = T\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2\left(\dfrac{\partial T}{\partial V}\right)_p$

$$= -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

熱力学第2法則から導かれる平衡状態の条件 $\cancel{d'Q < \frac{\ }{T}\ \frac{\ }{T}} < dS$ ($dS\ d'Q$)

$\dfrac{d'Q}{T} > dS$ の2次変分をとると $-T\left(\dfrac{\partial p}{\partial V}\right)_T > 0$ がわかるので, $C_p - C_V > 0$.

↘ 定性的なセツメイ?

II.

(5) $$Z_A = \frac{1}{N_A!}\frac{1}{h^{3N}}\int d\Gamma \exp\left[-\beta\sum_{i=1}^{3N}\frac{p_i^2}{2m}\right] \qquad d\Gamma = \prod_{i=1}^{3N} dq_i dp_i$$

$$= \frac{1}{N_A!}\cdot\frac{V^N}{h^{3N}}\int \prod dp_i \exp\left(-\frac{\beta}{2m}\sum_{i=1}^{3N} p_i^2\right)$$

$$= \frac{V^N}{N_A!}\left(\frac{\sqrt{2\pi m k_B T}}{h}\right)^{3N} = \underline{\frac{V^N}{N_A!\,\lambda_T^{3N}}}$$

(6) $$F_A = -k_B T \log Z_A = N_A k_B T\left(\log N_A - 1 - \log V + \frac{3}{2}\log\frac{h^2}{2m\pi k_B T}\right)$$

$$\mu = \frac{\partial F_A}{\partial N_A} = \underline{k_B T\left(\log N_A - \log V + \frac{3}{2}\log\frac{h^2}{2m\pi k_B T}\right)}$$

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \underline{\frac{N_A k_B T}{V}}$$

(7) N_B 個を M セットに分ければ良く,

$$W(N_B) = {}_{M+N_B-1}C_M = \underline{\frac{(M+N_B-1)!}{M!(N_B-1)!}} = \cancel{W(N_B)}.$$

(8) $$Z_B = W(N_B)\, e^{-\beta N_B \varepsilon}$$

$$= \frac{(M+N_B-1)!}{M!(N_B-1)!} e^{-\frac{N_B\varepsilon}{k_B T}}$$

$$F_B(N_B, T) = -k_B T \log\frac{(M+N_B-1)!}{M!(N_B-1)!} + N_B\varepsilon$$

(9) $F_A(N-X, T, V) + F_B(X, T)$ を X の関数として.

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(F_A(N-X, T, V) + F_B(X, T)\right) = -\left.\frac{\partial F_A}{\partial N_A}\right|_{N_A=N-X} + \left.\frac{\partial F_B}{\partial N_B}\right|_{N_B=X} = 0$$

であれば良い.

$$\therefore\ \mu = \frac{\partial F_B}{\partial N_B} \simeq \varepsilon - k_B T\log\frac{M+X^*}{X^*} \quad \therefore\ \underline{X^* = \frac{M}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}-1}}.$$

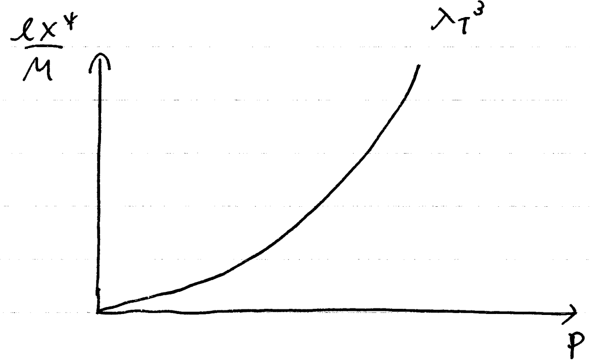
(10). $\mu = k_B T \left(\log \frac{N_A}{V} + \frac{3}{2}\log \frac{\hbar^2}{2m\pi k_B T} \right)$

$p = \frac{N_A k_B T}{V}$ ∴ $\frac{N_A}{V} = \frac{p}{k_B T}$ より

$\mu = k_B T \left(\log \lambda_T{}^3 \frac{p}{k_B T} \right)$ ∴ $\frac{\lambda_T{}^3}{k_B T} p = e^{\mu/k_B T}$.

よって

$X^* = \frac{M}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}-1} = \frac{Mp}{\frac{k_B T e^{\varepsilon/k_B T}}{\lambda_T{}^3} - p}$　　∴ グラフは



第4問 物理学(3)

I

(1) 密度を $\rho = \dfrac{M}{\pi(3a)^2}$ とすると.

$$I = \int dS\, \rho r^2 = \rho \int_0^{3a} dr\, r^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \underline{\frac{9Ma^2}{2}}$$

(2) O まわりのくり抜いた部分の慣性モーメントは.

$$\tilde{I} = \rho \int_0^{a} dr\, r^3 \int_0^{2\pi} d\theta + \rho \pi a^2 \times a^2 = \frac{Ma^2}{6}$$

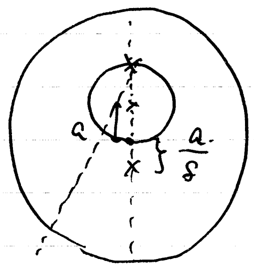
平行軸の定理から!

よってこの板の O まわりの慣性モーメントは

$$I_0 = \frac{9Ma^2}{2} - \frac{Ma^2}{6} = \frac{13Ma^2}{3}$$

よって $I = \dfrac{13Ma^2}{3} + \dfrac{8}{9}M \times \cancel{(2a)^2}\ (2a+\frac{a}{8})^2 = \cancel{\dfrac{71}{9}Ma^2} = \underline{\cancel{\dfrac{157}{9}Ma^2}}$. $\dfrac{37}{3}a^2M$

(3)

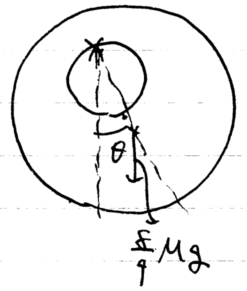


この板の重心は

O から a/8 下の所にある.

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{8}{9}Mg \times \left(2a + \frac{a}{8}\right)\sin\theta$$

$$= -\frac{8}{9}Mg \times \frac{17}{8}a\sin\theta$$



$$\therefore \frac{71}{\cancel{9}}Ma^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\cancel{8}}{\cancel{9}}Mg \times \frac{17}{\cancel{8}}\cancel{a}\sin\theta$$

$$\underline{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{17}{71}\frac{8}{a}\sin\theta}.$$

(4) $\sin\theta \simeq \theta$ として. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{17}{71}\dfrac{8}{a}\theta$

従って $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \underline{2\pi\sqrt{\dfrac{71}{17}\dfrac{a}{8}}}$.

II

(5) $\dfrac{mc^2}{2}$

(6) 静止系で見たときの光子は

$$\left(\frac{mc^2}{2}\right)^2 = (pc)^2 \quad \therefore \quad p = \pm\frac{mc}{2}$$

π中間子が $+v$ に運動するためには、静止系から見て元の慣性系は $-v$ に動いているから。

前方の光子については

$$\begin{pmatrix} E_f/c \\ p_f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mc}{2} \\ \frac{mc}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\frac{m}{2}(c+v) \\ \gamma\frac{m}{2}(c+v) \end{pmatrix}$$

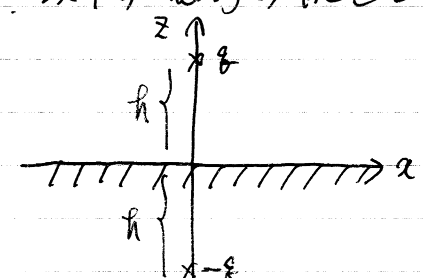
従って $\underline{E_f = \dfrac{mc(c+v)}{2\sqrt{1-v^2/c^2}}}$.

後方の光子については

$$\begin{pmatrix} E_b/c \\ p_b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mc}{2} \\ -\frac{mc}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\frac{m}{2}(c-v) \\ -\gamma\frac{m}{2}(c-v) \end{pmatrix}$$

従って $\underline{E_b = \dfrac{mc(c-v)}{2\sqrt{1-v^2/c^2}}}$.

III. 以下の電荷の配置と等価である。



(7) $\phi(x, y, z)$

$$= \underline{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}\right)}.$$

(8) $E_z = -\dfrac{\partial}{\partial z}\phi\Big|_{z=0} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2qh}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$　導体上に出来る電場は $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ であるから。

$$\sigma(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2qh}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}} = \underline{-\frac{1}{2\pi}\frac{qh}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}}.$$

(9) Maxwell eq (真空中) から.

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \vec{0} \quad \text{—①}$$

が…導出できるから.

①を代入して x成分を見ると.

$$\left(-E_0k^2 + \varepsilon_0\mu_0\omega^2E_0\right)\mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t+kz)}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \underline{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 = k^2}$$

磁場は

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(0,\ E_0k\,\mathrm{Re}\left(i e^{i(\omega t+kz)}\right),\ 0\right) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

より

$$\underline{\vec{B} = \left(0,\ -\frac{k}{\omega}E_0\mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t+kz)}\right),\ 0\right)}.$$

(10) 与えられた式に代入して.

$$-\vec{\nabla}^2\vec{E} + \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$$

$$= \left(E_0\mathrm{Re}\left[\left(\beta^2 + i\omega\mu_0\sigma - \omega^2\mu_0\varepsilon_0\right)e^{i(\omega t+\beta z)}\right],\ 0,\ 0\right) = 0 \text{ より.}$$

$$\therefore \quad \underline{\beta^2 = -i\omega\mu_0\sigma + \omega^2\mu_0\varepsilon_0}.$$

(11) $\beta^2 = \omega\mu_0\sigma\left(-i + \frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma}\right) \sim -i\omega\mu_0\sigma$ より.

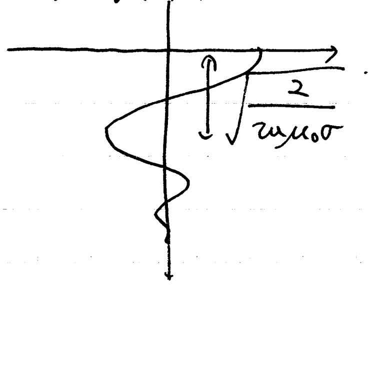
$$\beta \simeq \sqrt{\omega\mu_0\sigma}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

よって

$$E_x = E_0\mathrm{Re}\left[e^{i\left(\omega t + \left(\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} - i\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\right)z\right)}\right]$$

$$= E_0 e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}z}\,\mathrm{Re}\left[e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}z\right)}\right]$$

$z<0$ より下図のような減衰振動をする.



第5問 物理学(4).

I.

(1) Schrödinger eq は.

$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$. これを解いて. $\psi(\vec{x}) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ A: const.

ここから $E = \frac{\hbar^2|\vec{k}|^2}{2m}$

さらに境界条件から. $k_xL = k_yL = k_zL = 2n\pi$.

$\therefore \vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ これと規格化によって.

$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}\exp\left[i\frac{2\pi}{L}(n_xx + n_yy + n_zz)\right]$,

$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ を得る.

(2) 絶対零度では系は基底状態にあるので.

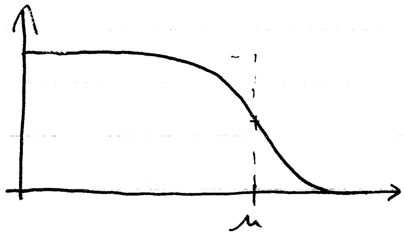
$N(\varepsilon) = 2\times\frac{4}{3}\pi|\vec{k}|^2\times\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 = \frac{L^3}{3\pi^2\hbar^3}(2m\varepsilon)^{3/2}$

εまでにつまっているフェルミ系の粒子の数

$\therefore \frac{L^3}{3\pi^2\hbar^3}(2m\varepsilon_F)^{3/2} = nL^3$ $\therefore$ $\underline{\varepsilon_F = \frac{\hbar}{2m}(3n\pi^2)^{2/3}}$.

(3). $D(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{L^3}{2\pi^2\hbar^3}(2m)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$ より従う.

(4) 以下のようになる.



(5) $\int_0^\infty D(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon = N$ であるから,

$$(\text{左辺}) \simeq \int_0^\mu D(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\mu} \quad -①$$

ここで $\mu = \mu_0 + \Delta\mu = \varepsilon_F + \Delta\mu$ として展開すると

$$① \simeq \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon)d\varepsilon + \Delta\mu D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\frac{dD(\varepsilon_F)}{d\varepsilon}$$

$$= N + \Delta\mu D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\frac{dD(\varepsilon_F)}{d\varepsilon} = N$$

$$\therefore \Delta\mu = -\frac{\pi^2}{6}\frac{D'(\varepsilon_F)}{D(\varepsilon_F)}(k_BT)^2$$

$$\therefore \underline{\mu = \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{6}\frac{D'(\varepsilon_F)}{D(\varepsilon_F)}(k_BT)^2}$$

(6). 同様に

$$E = \int_0^\infty \varepsilon D(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon \simeq \int_0^\mu \varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\left(\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\mu}$$

$$\simeq \cancel{\varepsilon_F D(\varepsilon_F)}$$

$$\simeq \cancel{\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon D(\varepsilon_F)d\varepsilon + \Delta\mu\,\varepsilon_F D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\left(\frac{dD(\varepsilon_F)}{d\varepsilon} + \varepsilon_F\right.}$$

$$\simeq \int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon + \Delta\mu\,\varepsilon_F D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\left(D(\varepsilon_F) + \varepsilon_F\frac{dD(\varepsilon_F)}{d\varepsilon}\right)$$

$$= E_0 - \frac{\pi^2}{6}\varepsilon_F\frac{\cancel{D'(\varepsilon_F)}}{\cancel{D(\varepsilon_F)}}\cancel{D(\varepsilon_F)}(k_BT)^2 + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\left(D(\varepsilon_F) + \cancel{\varepsilon_F D'(\varepsilon_F)}\right)$$

$$= E_0 + \frac{\pi^2}{6}D(\varepsilon_F)(k_BT)^2$$

$$\therefore \underline{C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\pi^2}{3}D(\varepsilon_F)k_B^2T}$$