院試過去問解答（情報理論）

福林 雄一朗

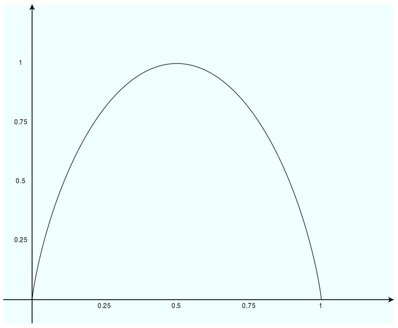
2005 年 7 月 13 日

【注意】解答が正しい保証はないです。自己責任で。

平成 17 年度

【設問 1】エントロピーの定義のまんま

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= \mathcal{H}(q) \\
&= -q\log_2 q - (1-q)\log_2(1-q)
\end{aligned}
$$

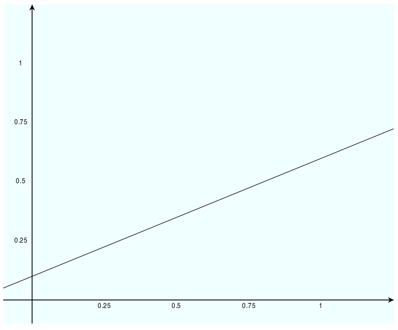


【設問 2】出力が 1 になる場合を考える

入力が 0 で出力が 1 になるのは p_{12}
入力が 1 で出力が 1 になるのは p_{22}

$$
\begin{aligned}
q &= (1-p)p_{12} + pp_{22} \\
&= 0.1(1-p) + 0.6p \\
&= 0.1 + 0.5p
\end{aligned}
$$

p が 0 から 1 まで変化するとき、q は 0.1 から 0.6 まで変化する



【設問 3】定義に従って考える
まず全問より

$$p = 2q - 0.2$$

になる。
$H(Y|X)$ を求める。

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= (1-p)\sum_{i=1}^{2} p_{1i} - \log_2 p_{1i} + p\sum_{i=1}^{2} p_{2i} - \log_2 p_{2i} \\ &= (1-p)\mathcal{H}(p_{11}) + p\mathcal{H}(p_{22}) \\ &= (1-p)\mathcal{H}(0.9) + p\mathcal{H}(0.6) \\ &= (1.2-2q)\mathcal{H}(0.9) + (2q-0.2)\mathcal{H}(0.6) \\ &= 2\left\{\mathcal{H}(0.6) - \mathcal{H}(0.9)\right\} q + 1.2\mathcal{H}(0.9) - 0.2\mathcal{H}(0.6) \\ & \quad (\mathcal{H}(0.6) > \mathcal{H}(0.9) \text{ より傾きは正}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= \mathcal{H}(q) - H(Y|X) \\ & \quad \text{（それぞれ全問までの結果を代入）} \end{aligned}$$

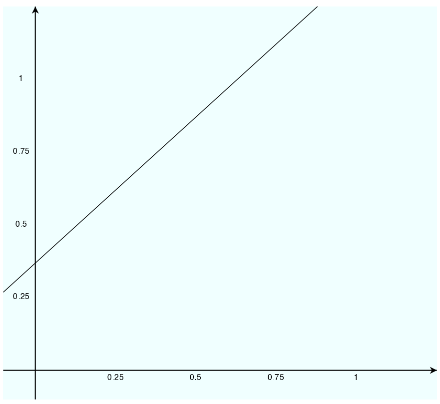


表 1: $H(Y|X)$

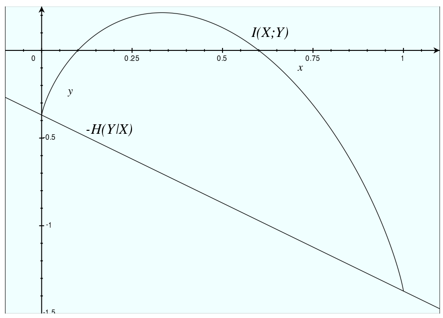


表 2: $I(X;Y)$

【設問 4】ここは怪しい。
$I(X;Y)$ が最大値が通信路容量なのは確かだが、それが $q = 0.35$ の時と簡単に断言できるのか？

通信路容量 C は

$$C = \max_p (I(X;Y)) \qquad (p \text{ は入力の確率分布})$$

である。前問の図より $I(X;Y)$ が最大になるのは 0.1 と 0.6 の中点にあたる q=0.35 の時。

【設問 5】ここも怪しい。

$$q = (1-p)(1-p_{11}) + 0.6p$$

より

$$\begin{aligned} p &= \frac{q + p_{11} - 1}{p_{11} - 0.4} \\ 1 - p &= \frac{0.6 - q}{p_{11} - 0.4} \end{aligned}$$

この p を用いて $I(X;Y)$ を求めると

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= \mathcal{H}(q) - \{(1-p)\mathcal{H}(p_{11}) + p(0.6)\} \\ &= \mathcal{H}(q) - \left\{ \frac{0.6 - q}{p_{11} - 0.4}\mathcal{H}(p_{11}) + \frac{q + p_{11} - 1}{p_{11} - 0.4}\mathcal{H}(0.6) \right\} \end{aligned}$$

通信路容量は $I(X;Y)$ の最大値である。
前問の結果より q を $(1-p_{11})$ と 0.6 の中間の値、つまり

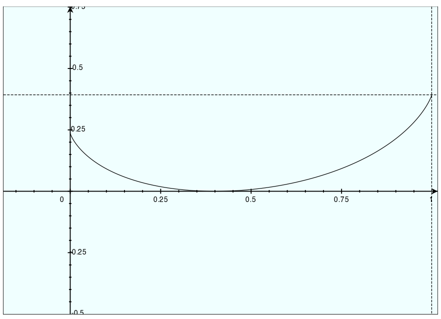
$$q = \frac{(1-p_{11}) + 0.6}{2} = \frac{1.6 - p_{11}}{2}$$

にすると $I(X;Y)$ が最大になり通信路容量 C になると考えられる（ここが怪しい）。

さきほどの $I(X;Y)$ に $q = \frac{1.6-p_{11}}{2}$ を代入すると

$$I(X;Y) = \mathcal{H}\left(\frac{1.6 - p_{11}}{2}\right) - \left\{ \frac{1}{2}\mathcal{H}(p_{11}) + \frac{1}{2}\mathcal{H}(0.6) \right\}$$

これより以下のグラフが得られる。



【言い訳】 q を上のようにとると $p = 1 - p$ になっているので、たぶん相互情報量 $I(X;Y)$ は最大になっているんだろうけど自信がない。

平成 16 年度

【設問 1】定義通り計算。

記憶のない情報源なので、

$$
\begin{aligned}
H(S) &= H_1(S) = -0.9\log_2 0.9 - 0.1\log_2 0.1 \\
&= -0.9\{\log_2 9 - \log_2 10\} - 0.1\{\log_2 1 - \log_2 10\} \\
&= -0.9(3.17 - 3.32) - 0.1(0 - 3.32) \\
&= -0.9 \times (-0.15) - 0.1 \times (-3.32) \\
&= 0.135 + 0.332 \\
&= 0.467
\end{aligned}
$$

【設問 2】2 元ハフマン符号化とは書いてないけどそう解釈して大丈夫でしょう。

a に 0,b に 1 を割り当てたとして、

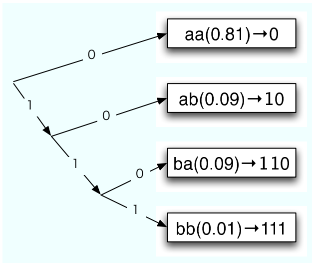
$$L_1 = 0.9 \times 1 + 0.1 \times 1 = 1$$

従って $L_1 > H(S)$ である。

【設問 3】情報源記号 2 文字をまとめて符号化。

右図のように符号化できる。

L_2 は 1 情報源記号あたりの符号長なので $2L_2$ は全体の平均符号長。



$$
\begin{aligned}
2L_2 &= 0.81 \times 1 + 0.09 \times 2 + 0.09 \times 3 + 0.01 \times \\
&= 0.81 + 0.18 + 0.27 + 0.03 \\
&= 1.29
\end{aligned}
$$

したがって $L_2 = 0.645$ となり、$L_1 > L_2 > H(S)$。

【設問 4】クラフトの不等式とシャノンの補助定理くらいは証明なしでいいのか？

n 次の拡大情報源 S^n が、M 個の符号語を持つとして、それらの確率を $p_1, \ldots, p_M$ 長さを $l_1, \ldots, l_M$ とする。

瞬時符号なのでクラフトの不等式より、

$$2^{-l_1} + \cdots + 2^{-l_M} \leq 1$$

が成り立つ。

ところで、一般に $q_1 + \cdots + q_M \leq 1$ の q_i に対し

$$-\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i \leq -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 q_i$$

が成り立つ（シャノンの補助定理）。

ここで、$q_i = 2^{-l_i}$ とするとさきほとのクラフトの不等式より $q_1 + \cdots + q_M \leq 1$ で、これをさきほどの不等式（シャノンの補助定理）に適用すると

$$\begin{aligned} H(S^n) &= -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i \\ &\leq -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 q_i \\ &= -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 2^{-l_i} \\ &= \sum_{i=1}^{M} p_i l_i \\ &= nL_n \end{aligned}$$

（ここまでで十分かも）

次に、

$$-\log_2 p_i \leq l_i < -\log_2 p_i + 1 \tag{1}$$

を満たす整数 l_i を定める（l_i は一つに定まる）。

このとき

$$2^{-l_i} \leq 2^{\log_2 p_i} = p_i$$

であるので

$$\sum_{i=1}^{M} 2^{-l_i} \leq \sum_{i=1}^{M} p_i = 1$$

となるので選んだ $\{l_i\}$ はクラフトの不等式を満たす。

ここで式 1 の両辺に p_i をかけ和をとると

$$\begin{array}{rcl} -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i \leq & \sum_{i=1}^{M} p_i l_i & < -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i + \sum_{i=1}^{M} p_i \\ H(S^n) \leq & nL_n & < H(S^n) + 1 \end{array}$$

以上より $H(S^n) \leq nL_n < H(S^n) + 1$ である。

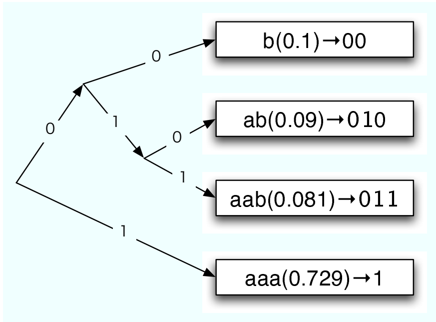
また、

$$H(S) = \lim_{n\to\infty} H_n(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(S^n)}{n}$$

の関係にある。

【設問 5】ランレングスハフマン符号化。

下の図の通り



【設問 6】怪しい。S の 1 記号あたりの平均符号長であるのに気をつけなければいけないのだが。

上図のように符号化できる。
全体の平均符号長は

$$\begin{aligned} & 0.1 \times 2 + 0.09 \times 3 + 0.081 \times 3 + 0.729 \times 1 \\ = & \ 0.2 + 0.27 + 0.243 + 0.729 \\ = & \ 1.442 \end{aligned}$$

また、情報源記号の平均長は

$$\begin{aligned} & 0.1 \times 1 + 0.09 \times 2 + 0.081 \times 3 + 0.729 \times 3 \\ = & \ 0.l + 0.18 + 0.243 + 2.187 \\ = & \ 2.71 \end{aligned}$$

したがって情報源 1 記号あたりの平均符号長は $L_r = \frac{1.442}{2.71} \fallingdotseq 0.532$ となり、$L_1 > L_2 > L_r > H(S)$。