1

a 　なにやらリーマン積分の収束性の問題ですねwまじめに級数で抑えましょう。リーマン積分のところは授業聞いてなかったからこんなんよりもっと華麗な手がありそうですが…。
$X < 4\pi n$ をみたす最小の n を m とします

$$\begin{aligned}\int_0^X \frac{\sin(x)}{x}dx &\leq \sum_{n=0}^{m}(\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi}\frac{\sin x}{x})dx \\ &\leq 1 + \sum_{n=1}^{m}(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}) \\ &\leq 2\end{aligned}$$

$X_n = 4\pi$ ととって $S_n = \int_0^{X_n}\frac{\sin(x)}{x}dx$ とすれば S_n は上の式から単調増加かつ上に有界なので、収束する。任意の X に対しては、n が十分に大きいとき $\int_{2m\pi}^{x}\frac{\sin x}{x}dx$ が 0 に収束するので、任意のXに対してもXが無限大に飛んだときにおなじ極限に収束する。

b

$$(L)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = (L)\int_0^\infty \max(0, \frac{\sin x}{x})dx + (L)\int_0^\infty \min(0, \frac{\sin x}{x})dx$$

この 2 つにわかれた積分のうち、両方が発散することをいえばいい。というわけでまず $\max(0.\frac{\sin x}{x})$ のほうの発散をいう。

$$\begin{aligned}(L)\int_0^\infty \max(0, \frac{\sin x}{x})dx &\geq \sum_{n=0}^{m-1}(\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx) \\ &\geq \sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

となり、m を無限大にとばせば、これは発散する。min のほうの発散も同じようにすればいえる。

2

a TH4,21 をつかってください。

$$\phi(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx$$

で $\frac{\sin x}{x}e^{-ax}$ は各 a について可積分で、$\lim_{a\to\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}$ も各点収束、また $0 < a < 1$ なる任意の a について $|\frac{\sin x}{x}e^{-ax}| < e^{-ax}$ で e^{-ax} は $\int_0^\infty e^{-ax}dx$ で可積分。そんなわけで TH4,21 で積分と lim の交換ができる。

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\phi(a) &= \lim_{a\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx \\ &= \int_0^\infty \lim_{a\to\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx = 0\end{aligned}$$

b TH4,22を使います・$\frac{\sin x}{x}e^{-ax}$は各aについて可積分でaについて微分可能。また$0 < a < 1$なる任意のaについて$|\frac{d}{da}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}| < e^{-ax}$となるため、TH 4,22が使え、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}\phi(a) &= \frac{d}{da}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{da}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx \\
&= -\int_0^\infty e^{-ax}\sin x dx \\
&= -\frac{1}{1+a^2}
\end{aligned}$$

となる。

c おまけみたいなもんっすね。

$$\frac{d}{da}arctan(a) = \frac{1}{a^2+1}$$

より

$$\phi(a) = -arctan(a) + C$$

Cは積分定数です(a)よりaが無限大に飛んだときに0になればいいから

$$\phi(a) = \frac{\pi}{2} - arctan(a)$$

3

ノルムの問題。

$$\begin{aligned}
||T_A||_1 &= \sup \frac{||Ax||_1}{||x||_1} \\
&= \sup \frac{\sum_i |\sum_j a_{ij}x_i|}{\sum_i |x_i|} \\
&\leq \max_j \sum_i |a_{ij}|
\end{aligned}$$

また、$\max_j \sum_i |a_{ij}|$となるjをj_0とすると

$$x = \{x_i = 0(i \neq j_0), x_{j_0} = 1\}$$

とすれば

$$\frac{||Ax||_1}{||x||_1} = \max_{j_0} \sum_i |a_{ij_0}|$$

となるため

$$||T_A||_1 = \max_{j_0} \sum_i |a_{ij_0}|$$

参考文献