数値解析

松尾宇泰教員

2007/03/07

- A4 版のメモ 1 枚持ち込み可.

1. 括弧内のキーワードを用いながら, 次の各項目について 150 文字程度で簡潔に説明せよ. キーワードは下線を引いて明示すること.
   (a) 行列の条件数 (誤差, 悪条件, 特異行列)
   (b) 連立非線形方程式 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ に対する Newton 法 (Jacobi 行列, 連立一次方程式, 計算量)
   (c) Gauss-Legendre 積分公式 (補間, 重み, 厳密な積分値)

2. 次のような N 次正方行列[*1]を考える. ただし記されていない要素は 0 とする. (右上と左下に-1 がいることに注意すること)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) 行列 A のように「3 重対角 + 右上 + 左下」のみに要素を持つ行列を係数行列にもつ連立一次方程式は, Gauss の消去法のアルゴリズムを多少変形して高速に解ける. そのようなアルゴリズムの一例を示し (枢軸選択はしなくてよい), おおよその計算量を示せ.
   (b) 行列 A は差分法の文脈でよく現れる. たとえば次の問題を差分法で離散化すると, 行列 A が現れることを説明せよ. 周期的境界条件を課した 1 次元 Poisson 方程式:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \ (0 < x < L), \ u(0) = u(L)$$

[*1] これはレポート第 1 回に出題した「3 重対角行列に対する Gauss の消去法」の上級編. アルゴリズムは若干複雑になるが, やはり高速に解けることを知っておいて損はない.

3. 次の常微分方程式[*2]の初期値問題を考えよう．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cp-q \\ p \end{pmatrix},\ t>0,\ p(0)=1,\ q(0)=0$$

ただし $c>0$ とし, 以下, 適宜 $\boldsymbol{z}=(p,q)^T$ と表記する．

(a) 任意の $c>0$ に対して, この常微分方程式の解 $\boldsymbol{z}(t)$ が有界であることを示せ.

(b) この方程式を陽的 Eular 法で離散化した式を示し, その安定性を議論せよ．(安定性は定数 c の大きさに依存しうるので注意すること)．また予想される解軌道の概略を, いくつか代表的な場合について示せ.

(c) 上の方程式に対して, 次のような計算公式を考える (「修正 Eular 法」と呼ばれる).

$$\frac{\boldsymbol{z}^{(n+1)}-\boldsymbol{z}^{(N)}}{h} = B(\boldsymbol{z}^{(N)}+\frac{h}{2}B\boldsymbol{z}^{(N)}), B=\begin{pmatrix} -c & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし $h>0$ は時間刻み幅, 上付き添え字の (n) は時間ステップ数を表す (初期値:$\boldsymbol{z}^{(0)}=(p(0),q(0))^T$)．この公式は陽的か, 陰的か．また公式の「次数」はいくらか.

[*2] レポート第 2 回で出題した「調和振動子問題 (ばね問題)」に対して, $-cp$ という項を付け加えたもの．これは速度 (p) に比例する摩擦項を表す．純粋に数学の問題としても解けるが, 物理的イメージを念頭に置く方が解きやすい.