

# 解析数理工学

杉原正顯教員

2006/07/20

1. (a) 広義 Riemann 積分

$$(R) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx$$

が存在することを証明せよ.

(b) 一方, Lebesgue 積分

$$(L) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

は存在しないことを証明せよ.

2. 実数  $\alpha > 0$  に対して,  $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$  とおく.

(a)  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \phi(\alpha)$  を求めよ.

(b)  $\phi'(\alpha)$  を求めよ.

(c)  $\phi(\alpha)$  を  $\arctan$  を用いて表せ. ただし,  $\arctan$  とは  $\tan$  の逆関数のことである.

3.  $A = (a_{ij})$  を  $m \times n$  実行列とし,  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^m$  への線形作用素  $T_A$  を以下の様に定義する.

$$\begin{array}{ccc} T_A & : & \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m \\ & & \Downarrow \qquad \Downarrow \\ & & \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} \end{array}$$

$T_A$  の作用素ノルム

$$\|T_A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}$$

を求めよ.