数値解析

大石泰章教員

2007/03/07

1. 次の事項について, それぞれ 150 字程度で説明せよ.
   (a) 連立 1 次方程式の数値解法とその計算量
   (b) Richardson 加速

2. 非線形方程式 $f(x) = 0$ を解く Newton 法は, 初期値 $x^{(0)}$ を適当に選び, $\nu = 0, 1, \cdots$ に関して

$$x^{(\nu+1)} := x^{(\nu)} - \frac{f(x^{(\nu)})}{f'(x^{(\nu)})}$$

   を反復する方法である.
   (a) $f(x) = x^2 - 1$ のとき, $x^{(0)} > 1$ ならば, 数列 $\{x^{(\nu)}\}$ は単調減少して 1 に収束することを証明せよ.
   (b) 同じく $f(x) = x^2 - 1$ のとき, $0 く x^{(0)} < 1$ ならば, $x^{(1)} > 1$ であることを証明せよ.
   (c) 上の結果を踏まえて, 2 次方程式 $x^2 - 1$ を解く Newton 法の大域的収束性について議論せよ.
   (d) 上の結果を踏まえて, 実根 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ を持つ 2 次方程式 $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ を解く Newton 法の大域的収束性について議論せよ.

3. 常微分方程式の初期値問題 $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y), y(a) = y_0$ の数値解法の 1 つである中点則は, $h = (b - a)/N, x_n = a + nh$ として, $n = 1, 2, \cdots, N - 1$ に関して

$$y_{n+1} := y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

   を反復する方法である. ただし, y_1 は例えば Runge-kutta 法を使って求めておくものとする.
   (a) 中点則は何段階の線形多段解法であるか. また, 陽的, 陰的の別を述べよ.
   (b) 中点則の局所離散化誤差を計算し, 最も支配的な項を係数とともに求めよ. さらにその結果に基づいて, 中点則は何次の線形多段解法であるか述べよ.
   (c) 中点則に関する安定性多項式を構成し, 絶対安定区間を求めよ. さらにその結果に基づいて, 中点則の実用性について議論せよ.