解析数理工学

杉原正顯教員

2007/07/19

1. $\alpha \geq 1$ とする．$x \in [0,1]$ で, 無数に多くの既約分数 $p/q(p,q$ は正の整数) に対して $|x - p/q| < 1/q^\alpha$ が成り立つもの全体を $A(\alpha)$ と書く．連分数の議論より, $m(A(2)) = 1$ となることが知られている．[*1] 一方, $\alpha > 2$ に対しては $m(A(\alpha)) = 0$ となる．後半を以下の指示に従って証明せよ．ここで $m(\cdot)$ は Lebesgue 測度である．
   (a) 正の整数 q に対して
   $$E_q \equiv \bigcup_{0 \leq p \leq q} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^\alpha}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^\alpha}\right]$$
   と定義する．このとき, 任意の正の整数に対して $A(\alpha) \subset \bigcup_{q \leq n} E_q$ が成り立つことを示せ．[*2]
   (b) (a) における n の任意性 (どんなに大きくても良いこと) に注意して, $m(A(\alpha)) = 0 (\alpha > 2)$ を示せ．
2. (a) 部分積分を用いて $\displaystyle\int_0^1 x^n \log x \mathrm{d}x$($n$: 非負整数) を求めよ．
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \log(1-x) \log x \mathrm{d}x$ を求めよ．ただし, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ は既知とする．[*3]
3. p を $1 \leq p < \infty$ を満たす実数とする．実数列 $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ で $\|x\|_p \equiv (\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} < \infty$ を満たすものの全体を l^p と書く．また, $\mathbf{R}$ 上の (実数値) 可測関数 $f(x)$ で $\|f\|_p \equiv (\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx)^{1/p} < \infty$ を満たすもの全体を $L^p(\mathbf{R})$ と書く．
   (a) $l^1 \subset l^2$ かつ $l^1 \neq l^2$ を示せ．
   (b) a, b を $0 < a < b < \infty$ を満たす実数とし,
   $$F_a(x) = \begin{cases} |x|^{-a} & (x \in [-1,1]) \\ 0 & (x \notin [-1,1]) \end{cases}, \quad G_b(x) = \begin{cases} 0 & (x \in [-1,1]) \\ |x|^{-b} & (x \notin [-1,1]) \end{cases}$$
   とおく．$F_a(x), G_b(x) \in L^1(\mathbf{R})$ となるための a, b に関する条件を与えよ．同様に $F_a(x), G_b(x) \in L^2(\mathbf{R})$ となる a, b に関する条件を求めよ．
   (c) $L^1(\mathbf{R})$ と $L^2(\mathbf{R})$ に関しては, (a) の様な包含関係はないことを示せ．
   (d) $L^1(\mathbf{R})$ においては, そのノルムと整合する内積 (f, g) は存在しないことを示せ．[*4]

[*1] 実際には, より強く, 任意の無理数が $A(2)$ に含まれることが知られている．

[*2] ヒント：$x \in A(\alpha) \Leftrightarrow$ 既約分数列 $\{p_i/q_i\}_{i=1}^\infty (p_i, q_i$は正の整数$, 0 < q_1 < q_2 \cdots \to \infty)$ が存在して $|x - p_i/q_i| < 1/q_i^\alpha$ が成立する．

[*3] ヒント：級数和の変形で $1/(n(n+1)) = 1/n - 1/(n+1)$ を用いる．

[*4] ヒント：ノルムと整合する内積があれば成立する中線定理 $\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 = 2(\|f\|_1^2 + \|g\|_1^2)$ が成り立たない関数 f, g を具体的に与えよ．