数学及力学演習 I

丸山勲教員

2008/03/06

- 参考書, ノート類の持込は不可とする.
- 問題用紙は 1 枚 (表裏), 解答用紙は 4 枚, 計算用紙は 1 枚. 各問につき 1 枚の解答用紙を用いること.
- 問題の設定が不十分, または不適当と思う場合はその旨を明記し, 合理的な設定をした上で回答せよ.
- 物理工学科の学生がこのテスト問題を解いても零点であるので, 十分注意する事.

1. 以下の小間について, 略解と共に解答を, 解答用紙 1 に記せ.
   (a) $y' + 2y = y^2$ を解け.
   (b) オイラー型微分方程式 $x^2y'' - xy' + y = 0$ を $x = e^t$ と変数変換することで解け.
   (c) 以下の三つの常微分方程式の内, 一つを解け. 解答にどれを選んだか明記すること.
      i. $y = xy' + \dfrac{1}{y}$
      ii. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$
      iii. $y = xy' - x^2 + y^2$
   (d) 三次元極座標 (r, θ, ϕ) から作る直交曲線座標系を考える.[*1] その基底ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ を書き下せ. 途中式は略してよい.
   (e) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r + 2\boldsymbol{e}_\theta + 3\boldsymbol{e}_\phi$ とするとき, $I_S = \displaystyle\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ. (S は半径 1 の上半球面とし, ベクトル面積素は外向き法線方向.)
   (f) $\boldsymbol{A} = {}^t(z^3, z^2, z)$ とするとき, $I_V = \displaystyle\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ. (V は半径 1 の球)
   (g) 四次元時空のスカラー場 $\phi(t, x, y, z)$ に関する汎関数 $J[\phi] = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int dtdV\{(\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi) - (\dot{\phi})^2\}$ のオイラー方程式を書き下せ.

[*1] $\boldsymbol{r} = {}^t(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$

2. 以下の小問について, 解法と共に解答を, 解答用紙 2 に記せ.

(a) 以下の微分方程式の固定点 (平衡点) の安定性を調べ, 図示せよ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\gamma v - \omega^2 x \end{cases}$$

ここで, $\gamma = 2, \omega = 2$ とせよ.

(b) $y = y(t) \in \mathbf{R}$ に関する次の強制振動の微分方程式を考えよう. $\omega, \omega_0 > 0$ とする.

$$\ddot{y} + \omega^2 y = A \cos \omega_0 t \tag{1}$$

i. $A = 0$ の時の一般解 (斉次解) を求めよ.

ii. $z = z(t) \in (C)$ が次の微分方程式

$$\ddot{z} + \omega^2 z = A e^{i\omega_0 t}$$

の解である時, $y = \mathrm{Re}[z(t)]$ は強制振動の微分方程式 (1) を満たすことを示せ.

iii. 強制振動の一般解 $y(t)$ を求めよ. ここで, $\omega = \omega_0, \omega \neq \omega_0$ の場合分けに注意せよ.

(c) 級数解の方法を用いて, $x^2 y'' - xy' + y = 0$ の $x = 0$ 近傍での二つの独立解を求めよ. この時, 漸化式の解法は詳しく説明すること.

(d) 級数解の方法を用いて, $x^2 y'' - xy' + y = 0$ の $x = 1$ 近傍での二つの独立解を求めよ. この時, 漸化式の解法は詳しく説明すること.

3. 以下の小問について, 解法と共に解答を, 解答用紙 3 に記せ. 以下の問題では, スカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$, ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$, 電場 $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$, 磁場 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, 磁荷 $Q_m = \displaystyle\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$ と定義されるとせよ.

(a) 三次元ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ に関する汎関数 $S[\boldsymbol{r}] = \displaystyle\int dt (\frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 + \phi(\boldsymbol{r}(t), t) - \dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t), t))$ のオイラー方程式を書き下せ. ただし, 答えは $\phi, \boldsymbol{A}$ ではなく $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を用いて表せ.

(b) $\phi = 0, \boldsymbol{A} = {}^T(0, x, 0)$ の時, オイラー方程式を満たす粒子の軌道を図示せよ.

(c) $\boldsymbol{A}$ が原点では定義されていないが, それ以外で十分滑らかな関数である時, 半径 1 の球の表面 S の内側に含まれる磁荷 $Q_m = 0$ となる事を示せ.

(d) $\boldsymbol{A}$ が三次元極座標系 (r, θ, ϕ) において,

$$\boldsymbol{A} = \begin{cases} \boldsymbol{A}^N(\boldsymbol{r})(r \neq 0, \theta \in [0, \pi/2]) \\ \boldsymbol{A}^S(\boldsymbol{r})(r \neq 0, \theta \in [\pi/2, \pi]) \end{cases}$$

と書けているとき, 以下の問題に答えよ.

i. xy 平面 $(\theta = \pi/2)$ 上でゲージ変換 $\boldsymbol{A}^N - \boldsymbol{A}^S = \nabla\chi(\phi)$ が成立しているとき, 半径 1 の球の表面 S の内側に含まれる磁荷が $Q_m = \chi(2\pi - 0) - \chi(0)$ となることを示せ.

ii. $\boldsymbol{A}^N = -\dfrac{\cos\theta - 1}{r \sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{A}^S = -\dfrac{\cos\theta + 1}{r \sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi$ のとき, $\boldsymbol{B}$ を求めよ.

iii. $\boldsymbol{A}^N = -\dfrac{\cos\theta - 1}{r \sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{A}^S = -\dfrac{\cos\theta + 1}{r \sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi$ のとき, Q_m を求めよ.

4. 以下の小問について, 解法と共に解答を, 解答用紙 4 に記せ.

(a) 二次元上の各点で速度が $v(x,y)$ と与えられるとき, 曲線 $y = y(x)$ に沿って進む時間は $T = \int dt = \int dx \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(x,y)}$ となる. これを示せ.

(b) 変分法の文章題「100km 離れた同じ高さの二点を摩擦なしの地下トンネルで結び, 貨物を重力のみによって輸送する. 最短でどのくらい時間が掛かるか. 」を以下の誘導問題に従って解け.

i. 時刻 $t = 0$ において原点に静止している質量 m の物質が曲線 $y = y(x)$ 上を摩擦なく滑り落ちるとき $v(x,y) = \sqrt{2gy}$ となる. ここで, y 軸を下向き正とした. この時, 落下時間の極値を与える曲線がサイクロイド $y = A(1-\cos\theta), x = A(\theta - \sin\theta)$ となることを示せ. (この曲線がオイラー方程式を満たすことを示してもよい) ここで A は積分定数. θ は曲線の媒介変数である.

ii. $(x_0, y_0) = 0, (x_1, y_1) = (K, 0)$ として, T を g, K によって表せ. 実際 $K = 100\text{km}, g = 9.8\text{m}/s^2$ の時に T を評価せよ.

(c) 変分法の文章題「暑い日に滑走路上で出来る逃げ水と呼ばれる現象をフェルマーの原理により光線の経路を求めることで説明せよ」を以下の誘導問題に従って解け.

i. 滑走路上の距離 y における光の速さは近似的に $v(x,y) = V_0(1-\alpha y), \alpha > 0$ で与えられると仮定する. ここで, y は上向き正として $y < 0$ は地面と考える. この時の経路時間の極値を与える曲線は下向き凸であることを示せ. ただし $\alpha \ll 1$ を仮定してよい.

ii. フェルマーの原理によると, 経路時間の極値を与える曲線が光線の経路となる. これを用いて, 滑走路上に立っている人が, 足元付近の滑走路を見た場合, 遠くの滑走路を見た場合のそれぞれの光線の経路を簡単に図示せよ.