確率数理工学

竹村彰通教員

2008/07/25

以下の問にすべて答えること．解答用紙は 2 枚を使用し, 2 枚とも名前および学生証番号を書き, また 1/2, 2/2 等とページを明示しておくこと．

1. X を 0 と 1 の間の一様乱数とする．また, $X = x$ を固定したとき, $Y|X = x$ の条件付分布は $x \leq 1/2$ ならば 0 と $2x$ の間の一様分布, $x \geq 1/2$ ならば $2x - 1$ と 1 の間の一様分布とする．Y の期待値, 分散, および周辺密度関数を求めよ．ただし $\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)) = \mathrm{E}(Y), \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y|X))$ の関係式を用いてよい.

2. p 次元の多変量正規分布の密度関数は,

$$f(\boldsymbol{x} = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}(\det\Sigma)^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}))$$

と与えられる．ただし $\boldsymbol{\mu}$ は期待値のベクトル (p 次元列ベクトル), Σ は $p \times p$ の分散共分散行列, $'$ は転置を表している．p 次元の多変量正規分布の積率母関数

$$\int_{\mathbf{R}^p} e^{\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

を求めよ．また積率母関数を用いることにより, $p \geq 4 \wedge \mu = 0$ の場合について,

$$\mathrm{E}(X_1^4), \mathrm{E}(X_1^2 X_2^2), \mathrm{E}(X_1 X_2 X_3 X_4)$$

を求めよ.

3.
- マルコフの不等式：

$$\mathrm{P}(X \geq 0) = 1, \forall c > 0;\ \mathrm{P}(X \geq c) \leq \mathrm{E}(X)/c$$

- チェビシェフの不等式：

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}(X)| \geq c\sigma) \leq 1/c^2,\ \sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$$

- 独立同一分布に従う確率変数の和の分散の公式
- 大数の弱法則

について順次説明せよ.

4. (Gambler's ruin problem) A, B2 人のプレイヤーがいて, 初期資金をそれぞれ a 円, b 円とする. ($a, b \in \mathbf{Z}^+$) 各ラウンドでそれぞれ 1 円ずつ賭け, 買った方が 2 円を取るものとする. ただし勝つ確率は 1/2 とする. そして, どちらかが破産したら破産したほうがゲームに負けたとする. このゲームを吸収壁を持つランダムウォークの問題と定式化し, A がゲームに勝つ確率が $a/(a+b)$ となることを示せ. またマルチンゲールの考え方による説明を与えよ.
以上を 3 人のプレイヤーの場合に一般化しよう. A, B, C3 人のプレイヤーがいて, 初期資金をそれぞれ a, b, c 円とする. ($a, b, c \in \mathbf{Z}^+$) 各ラウンドでそれぞれ 1 円ずつ賭け, 確率 1/3 で勝った者が 3 円を取るものとする. ただし, 1 人が破産した場合には, 残った 2 人で同様のゲームを継続するものと考える. 最後に $a+b+c$ 円のすべてを取った者がゲームの勝者とする. マルチンゲールの考え方によれば, A が勝つ確率は $a/(a+b+c)$ になると予想される. このことの証明を考えてみよ.