

統計力学第一

土井正男教員

2006/07/26

1. 図1のように質量 m の二つの質点がバネ定数 $k = m\Omega^2$ の二つのバネでつながれている。それぞれの質点の平衡位置からの変位を x_1, x_2 、運動量を p_1, p_2 とすると系のハミルトン関数は次のように書ける。

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m\Omega^2}{2}[x_1^2 + (x_1 - x_2)^2]$$

系全体が温度 T の熱浴の中におかれているとして次の問いに答えよ。

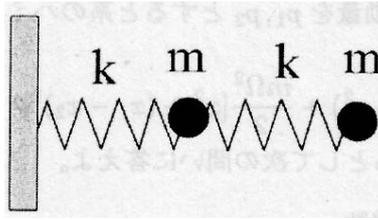


図1

- (a) 古典統計に基づいて、この系の分配関数

$$Z_c = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \exp(-\beta H)$$

を計算せよ。

- (b) この系の固有角振動数 ω_1, ω_2 を求めよ。
(c) 量子統計に基づいて、この系の分配関数 Z_q を計算せよ。
(d) $\beta\hbar\Omega \ll 1$ のときに Z_c と Z_q とが一致することを示せ。
2. A, B 二成分からなる溶液において、それぞれの成分の化学ポテンシャルは、温度 T 、圧力 P 、および A のモル分率を $x = N_A/(N_A + N_B)$ の関数として $\mu_A(T, P, x), \mu_B(T, P, x)$ と書くことができる。以下の問いに答えよ。
- (a) $x \ll 1$ が成り立つ希薄溶液においては、溶質 A の化学ポテンシャルが $\mu_A(T, P, x) = \mu_{A0}(T, P) + k_b T \ln x$ と書ける。このとき、溶媒 B の化学ポテンシャルは $\mu_B(T, P, x) = \mu_{B0}(T, P) - xk_B T$ と書けることを示せ。
- (b) 浸透圧 Π に関する vant Hoff の法則

$$\Pi = \frac{nRT}{V}$$

を導け。ここで n は溶質のモル数、 V は溶液の体積、 R はガス定数である。

- (c) 図2のように太さ一定の2本のガラス管の下の部分に穴を開け、半透膜を張り、水を高さ h_0 まで満たした。この状態で左右の側のガラス管にそれぞれ溶質を n_1, n_2 モル入れたところ、溶媒が移動し、左右のガラス管の液面の高さはそれぞれ h_1, h_2 となった。ガラス管の断面積を S 、溶媒の密度を ρ として、 $\rho g S h_0^2 / RT \ll 1$ の場合と、 $\rho g S h_0^2 / RT \gg 1$ の二つの場合について h_1, h_2 を求めよ。ただし、溶液は希薄溶液として扱ってよく、入れた溶質の体積は無視できるので、 $h_1 + h_2 = 2h_0$ が成り立つとしてよい。

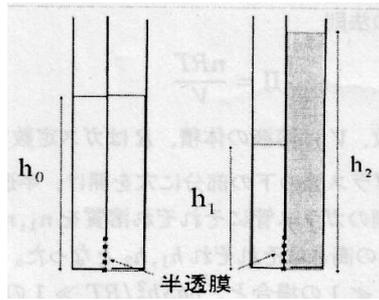


図2

3. 次の言葉の意味を説明せよ。

- (a) 古典解析力学におけるハミルトン関数
- (b) 熱波長
- (c) 粒子数表示