数学演習

藤原毅夫教員

2007/02/09

- 解答の順序は自由です. 解答用紙が不足する場合は監督者に申し出てください.
- 主に解答の導出の仕方について採点致しますので, 思考・計算の過程についても簡潔に記して下さい.
- 特殊関数の公式は, 試験問題に出ているもの以外は証明なしで使わないように注意してください.
- 積分と無限和の順序や, 積分同士の順序の交換等については証明無しで行ってかまいません.

1. $e^{iz\sin\theta} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)e^{in\theta}$ で定義される関数 $f_n(z)$ を考える. $f_n(z)$ と $f'_n(z)$ を, $f_{n-1}(z)$ と $f_{n+1}(z)$ で表せ. ($f_n(z)$ および $f'_n(z)$ を, $a_n(z)f_{n-1}(z) + b_n(z)f_{n+1}(z)$ ($a_n(z), b_n(z)$ は初等関数) の形に表す)
2. n 次多項式 $p_n(x)(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を, $p_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^x}{n!}\dfrac{d^n(e^{-x}x^n)}{dx^n}$ で定義する. 例えば $p_0(x) = 1, p_1(x) = x - 1, p_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$ である. 次の問に答えよ.
   (a) $I_{mn} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}p_m(x)p_n(x)dx$ を求めよ.
   (b) x^n(n は負でない整数) を $p_m(x)$ で展開せよ.
3. $1 < x < 2$ において, $u(x)$ に関する微分方程式 $L[u] = \dfrac{d}{dx}(x\dfrac{du(x)}{dx}) = -1, u(1) = 1, u'(2) = 1$ を次の手順で解け.
   (a) $L[u]$ についての Green の公式を $\displaystyle\int_1^2 (uL[v] - vL[u])dx = \cdots$ の形に書け.
   (b) この問題に対応する Green 関数を計算せよ. それを用いて, (a) の結果から与えられた微分方程式の解を求めよ.
4. $u(x, y, z)$ に関する偏微分方程式 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -f(x, y, z)$ の主要解は

$$G_0(Q; P) \simeq G_0(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi r_{QP}}$$

となる. ただし r_{QP} は点 $Q(x, y, z)$ と点 $P(\xi, \eta, \zeta)$ の間の距離とする. これを用いて, 領域 $x > 0$ における偏微分方程式の境界値問題:$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -f(x, y, z)$, $u(0, y, z) = g(y, z)$, $\displaystyle\lim_{x^2+y^2+z^2\to 0} u(x, y, z) = 0$ を, Green 関数を用いて解くことを考える. ($f(x, y, z), g(y, z)$ は与えられた関数とし, $g(y, z)$ は $y^2 + z^2 \to \infty$ で十分速く 0 に収束すると仮定する.)
(a) Green 関数 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ の満たすべき方程式を全て書き下せ.
(b) Green 関数 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ を書き下し, それが実際に (a) で書いた方程式を満たすことを示せ.

公式:ガンマ関数 ($\nu > 0$) :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1}dt, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu), n \in \mathbf{Z}^+ \Rightarrow \Gamma(n) = (n - 1)!$$