数値線形計算

松尾宇泰教員

2006/08/01

- A4 版のメモ 1 枚持ち込み可.

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解くための反復法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = M\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$ について考える．ただし係数行列 A は正則で, M は反復行列, その他はベクトルである.
   (a) 上の反復法の収束性は何で決まるか.
   (b) 特に
   $$A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \ (p > q > 0)$$
   のとき, 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対する Jacobi 法と Gauss-Seidel 法の反復行列を書き, 収束性を判定せよ.
   (c) (発展問題：時間に余裕のある人のみやること．満点枠外のボーナス問題) さらに
   $$A = \begin{pmatrix} p & q & q \\ q & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}$$
   とした場合の収束性を議論せよ.

2. 固有値問題の解法に関連し, 以下の問いに答えよ.
   (a) 相似変換で固有値は不変であることを示せ.
   (b) 任意の正方行列は, あるユニタリ変換で Hessenberg 化可能である．この事実を認めた上で, 任意の Hermite 行列が, あるユニタリ変換で三重対角化可能であることを示せ.
   (c) 上の事実は, 実対称行列に対する二分法でどのように有用か, 簡単に説明せよ.

3. 線形計算の講義をほとんどサボってしまった D 君が, かけずり回ってどうにか以下のような「重要事項」を聞き集めた (試験に出るらしい)．しかしその意味するところがよく分からず, 試験前日に泣き顔になっている．あなたが D 君の無二の親友であるとして, 彼に要点のみ簡潔に説明せよ．ただし D 君は線形代数は理解しており, 講義ノート (のコピー) は持っている.
   (a) 行列の QR 分解は本質的に Gram-Schmidt の直交化と等しい．またこのことから, Hessenberg 行列を QR 分解したとき, Q も Hessenberg 形になることが直ちに分かる.
   (b) 実行列に対する共役勾配法は, 理論的には係数行列が対称正定値の場合に使用できる (正当化される)．また収束の速さは係数行列の固有値分布で決まる.
   (c) QR 法では, Jordan 標準形ではなく Schur 形を目指す．このとき Hessenberg 形が, 「固有値を求めるまで」と「固有ベクトルを求めるまで」のそれぞれで有用な中間形である.