解析数理工学

杉原正顯教員

2005/07/21

1. (a) E を $\mathbf{R}^d$ の可測集合，$f_n(x)$ を $f_n(x) \geq 0$ を満たす可積分関数列とする．このとき

$$\int_E \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

を示せ．

(b) 上において，$\leq$ が $<$ となる例を与えよ．

2. （B 関数から Γ 関数へ）

(a) r を正の実数，n を自然数とするとき，つぎの積分値を部分積分を用いて求めよ．

$$\int_0^1 x^r(1-x)^n\mathrm{d}x$$

(b) s を $0 < s < 1$ を満たす実数，n を自然数とする．(a) の結果を利用して，具体的には適当に変数変換する事によって，つぎの積分値を求めよ．

$$\int_0^1 \left(\frac{1-y^s}{s}\right)^n \mathrm{d}y$$

(c) (b) の結果で $s \to \infty$ とすることによって，$n!$ を表す積分を導け．もちろん積分と極限の交換は証明を要す．

3. (a) P の元

$$p(t) = \sum_{k=0}^{l} a_k t^k$$

のノルムを

$$\|p\| = max_{0\leq k\leq l}|a_k|$$

で導入すると，空間 P はノルム空間となる．この空間は完備でないこと（つまり，Banach 空間でないこと）を証明せよ．

(b) 各自然数 n に対して，ノルム空間 P から実数 $\mathbf{R}$（絶対値でノルムの定義された Banach 空間と考える）への線形作用素 L_n を

$$p(t) = \sum_{k=0}^{l} a_k t^k \to L_n p = \sum_{k=0}^{\min\{l,n\}} a_k$$

によって定義する．このとき L_n は有界作用素となる．$\|L_n\|$ を求めよ．