応用空間論

駒木文保教員

2008/07/22

問 1. 外微分の公式 $\mathrm{d}^2 = 0$ を用いて，3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル解析の公式 $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ \varphi = 0$, $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = 0$ を導出せよ．ただし，φ，$\boldsymbol{A}$ はそれぞれ $\mathbf{R}^3$ 上の（実数値）関数，ベクトル場である．

問 2. (x, y, z) を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の正規直交座標系とする．$\alpha = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z$，$\beta = e\mathrm{d}x + f\mathrm{d}y + g\mathrm{d}z$ はそれぞれ $\mathbf{R}^3$ 上の 1-形式である．このとき，$*(\alpha \wedge \beta)$ と $\alpha \wedge (*\beta)$ を求めよ．

問 3. 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 中の単位球面 S^2 上に適当な（局所）座標系を設定せよ．この座標系を $x = (x^i)$ $(i = 1, 2)$ とするとき，S^2 の計量テンソル場の座標系 x^i に対する成分 $g_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2)$ を求めよ．

問 4. 測地線の 2 種類の異なる定義とその関係について説明せよ．

問 5. n 次元多様体の 2 つの（局所）座標系 $x = (x^i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，$y = (y^{i'})$ $(i' = 1, 2, \cdots n)$ に対する接続の係数をそれぞれ Γ^k_{ij}，$\Gamma^{k'}_{i'j'}$ とすると，

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = A^{k'}_j \partial_{i'} A^j_{j'} + A^i_{i'} A^j_{j'} A^{k'}_k \Gamma^k_{ij} \tag{1}$$

が成立する．ただし，$A^i_{i'} = \partial x^i / \partial y^{i'}$，$A^{i'}_i = \partial y^{i'} / \partial x^i$ である．

1. 式 (1) より Γ^k_{ij} はテンソルではないことがわかる．このことを説明せよ．
2. 式 (1) を利用して，ユークリッド平面の極座標に対する接続の係数を求めよ．