数値解析

大石泰章教員

2004/3/3

1. 次の事項について, それぞれ 150 字程度で説明せよ.
   (a) 二重指数関数型数値積分公式
   (b) 数値微分
2. 微分方程式の初期値問題 $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)(a < x < b)$, $y(a) = y_0$ の数値解法である段数 s の Runge-Kutta 法は, 刻み幅が $h = (b-a)/N$ のとき,

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j)(i = 1, \dots, s) \tag{1}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i \tag{2}$$

   と記述される. ただし $x_n = a + nh$ とし, y_n を $y(x_n)$ の近似値とする. また, $i = 1, \dots, s$ に対して $c_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} a_{ij}$ である. これについて以下の問いに答えよ.
   (a) 上記の Runge-Kutta 法が 2 次の公式であるためには,

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1 \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=1}^{s} b_i c_i = \frac{1}{2}$$

   であることが必要かつ十分であることを証明せよ.
   (b) 2 段 2 次の陽的 Runge-Kutta 法で $b_i = 1/2$ であるものを求め, 式 (1), (2) の形式で記述せよ.
3. 常微分方程式の初期値問題 $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)(a < x < b)$, $y(a) = y_0$ の数値解法である 1 段階 2 次の Adams-Moulton の公式は, 刻み幅が $h = (b-a)/N$ であるとき,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n))$$

   と記述される. ただし $x_n = a + nh$ とし, y_n を $y(x_n)$ の近似値とする. これについて以下の問いに答えよ.
   (a) 1 段階 2 次の Adams-Moulton 公式を初期値問題 $\frac{dy}{dx} = -2y(0 < x < 1)$, $y(0) = 1$ に適用し, 刻み幅が 1/2, 1/4, 1/8 の場合のそれぞれについて $y(1)$ の近似値を計算せよ.
   (b) 前問の計算結果を使ってどのようなことが可能か議論せよ.
   (c) 1 段階 2 次の Adams-Moulton の公式が A 安定であることを証明せよ.