信号処理論第二

小野順貴教員

2008/02/01

1. 以下の語句を説明せよ．必要な場合には数式や図を適切に用いること．
   (a) 超関数
   (b) キュムラント
   (c) 窓関数
   (d) 直交原理
   (e) （状態）遷移行列
2. 信号 $f_1(t)$，$f_2(t)$ の Fourier 変換を，

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t,\ F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{1}$$

   と定義するとき，以下の問いに答えよ．
   (a) $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の重畳積分（畳み込み）を $g(t)$ とする．$g(t)$ を $f_1(t)$，$f_2(t)$ を用いて表せ．
   (b) $g(t)$ の Fourier 変換 $G(\omega)$ と，$F_1(\omega)$，$F_2(\omega)$ の間に成り立つ関係式は重畳積分定理と呼ばれる．これを示せ．
3. $v(t)$，$w(t)$ を，$\mathrm{E}[v(t)] = \mathrm{E}[w(t)] = 0$，$\mathrm{E}[v(t)v(\tau)] = \sigma_v^2\delta(t-\tau)$，$\mathrm{E}[w(t)w(\tau)] = \sigma_w^2\delta(t-\tau)$，$\mathrm{E}[v(t)w(\tau)] = 0$ を満たすガウス性雑音とし，

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + v(t) \tag{2}$$

$$y(t) = x(t) + w(t) \tag{3}$$

   とすると，$x(t)$，$y(t)$ は実数値をとる定常確率過程となる．ただし，a は正の実数とする．このとき以下の問いに答えよ．
   (a) 一般に，実数値をとる定常確率過程 $z(t)$ の自己相関関数 $\phi_{zz}(\tau) = \mathrm{E}[z(t)z(t+\tau)]$，$\dot{z}(t)$ の自己相関関数 $\phi_{\dot{z}\dot{z}} = \mathrm{E}[\dot{z}(t)\dot{z}(t+\tau)]$，$z(t)$，$\dot{z}(t)$ の相互相関関数 $\phi_{z\dot{z}}(t) = \mathrm{E}[z(t)\dot{z}(t+\tau)]$ に対して，以下が成り立つことを示せ．

$$\phi_{\dot{z}\dot{z}}(\tau) = -\ddot{\phi}_{zz}(\tau) \tag{4}$$

$$\phi_{z\dot{z}}(-\tau) = -\phi_{z\dot{z}}(\tau) \tag{5}$$

   (b) 式 (2) を $v(t) = \dot{x}(t) + ax(t)$ と変形し，(a) に基づきこの両辺の相互相関関数を求め，それらを Fourier 変換することにより，$x(t)$ のパワースペクトル $S_{xx}(\omega)$ を求めよ．
   (c) (b) で求めた $S_{xx}(\omega)$ を既知として，$y(t)$ から $x(t)$ を推定する Wiener フィルタを求めよ．ただし，Wiener フィルタは因果性を満たしていなくてもよいものとする．

（d）式 (2)，式 (3) の関係を既知とし，$y(t)$ から $x(t)$ を推定する Kalman フィルタを求めよ．ただし，Kalman ゲインを k としてよい．

（e）(d) の Kalman フィルタにおいて，誤差分散 $\mathrm{E}[|\hat{x}(t) - x(t)|^2]$ が一定となった場合の Kalman ゲインを求めよ．