算法設計

1997/07/22

1.

$$-0.02x_1 + x_2 + 5x_3 = 7.02$$

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

について, 精度を 10 進 3 桁とし, ガウスの消去法により解を求めよ．ピボット選択を行なう場合と行なわない場合の 2 通りを考えよ.

2. n 次の実正方行列 A について, ガウスの消去法を応用することにより, $A = LU$ の形に分解できること, および, そのための条件を示せ．ここで, L は対角成分が 1 である下三角行列, U は上三角行列である.

3. n 次の実正方行列 A について, Householder 変換の列 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n-2}$ を用いて

$$A_1 = Q_{n-2} \cdots Q_2 Q_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-2}$$

が上 Hessenberg 行列 ($i > j+1$ である i, j 成分が 0 である行列) となるように変換出来ることを示せ. さらに, $n-1$ 個の Givens 変換の列 $G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}$ を用いることにより,

$$A_1 = G_1 G_2 \cdots G_{n-1} R$$

の形に分解されることを示せ．ここで, R は上三角行列である．ただし, Householder 変換 H とは, 単位行列 I, ある単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を用いて $H = I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ と表される行列のことであり, Givens 変換とは, ある $0 \le \theta < 2\pi, 1 \le p \ne q \le u$ を用いて,

$$q_{ij} = \begin{cases} \cos\theta & i = j \in \{p, q\} \\ \sin\theta & i = p, j = q \\ -\sin\theta & i = q, j = p \\ 1 & i = j \notin \{p, q\} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と表される行列のことである.

4. 2 次元の領域 Ω とその境界 $\Gamma_q, \Gamma_u(\Gamma_1 \cup \Gamma_u = \partial\Omega)$ において

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}) + f(x,y) = 0 \text{ for}(x,y) \in \Omega$$

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = q(x,y) \text{ for}(x,y) \in \Gamma_q, u(x,y) = g(x,y) \text{ for}(x,y) \in \Gamma_u$$

によって与えられる熱伝導方程式の定常解 $u(x,y)$ は, 任意の $v(x,y) \in \{u| \int_\Omega (|v|^2 + |\frac{\partial v}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial v}{\partial y}|^2) d\Omega < \infty, v(x,y) = 0 \text{ if}(x,y) \in \Gamma_u\}$ に対して,

$$-\int_\Omega (k\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}) d\Omega + \int_\Omega vfd\Omega + \int_\Gamma vqds = 0$$

を満たすことを示せ. ただし, $\frac{\partial u}{\partial n}$ は外向き法線方向の微分, $\int d\Omega$ は面積分, $\int ds$ は線積分をあらわすものとする.

5. 2 分木について, 各節点が整数値を持っており, この値は右の枝にある節点の値を越えず, 左の技にある節点の値よりは大きいとする. 以下の問いに答えよ.
   (a) 2 分木の表現に適したデータ構造を示し, この 2 分木に新たな節点 (値) を追加する操作について説明せよ.
   (b) n 個の節点を持つ 2 分木の操作を n 回行なうことにより構成する. この際, n 個の値の順序はランダムに選ばれると仮定し, 2 分木を構成するために必要な比較操作の平均回数 $C(n)$ は, $\mathcal{O}(n \log n)$ であることを示せ. ただし, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \simeq \log_e n$ に注意せよ.
   (c) T を 2 分木とし, LIST(T) を次のように再帰的に定義された関数であるとする. LIST(T) は, 節点の値を小さい順に並べたものを返すことを示せ. ただし, T_t, T_r は, それぞれ T の根の左右の部分木を表す.

      LIST(T)
         T が空でない時
            LIST(T_l), T の根の値, LIST(T_r) を返す.
         T が空の時
            何も返さない.