3

問1

生成消滅演算子を使いましょうー。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + \frac{ip}{m\omega}) \quad (0.1)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - \frac{ip}{m\omega}) \quad (0.2)$$

$$(0.3)$$

とおくと、

$$H_0 = (\frac{1}{2} + aa^\dagger)\hbar\omega \quad (0.4)$$

$$(0.5)$$

とかけ、エネルギーは $n+\frac{1}{2}$ に離散化される。一番下の n=0 のエネルギー状態を—0¿,n=1 の状態を—1¿とおき、エネルギーの原点を $\hbar\omega$ にすれば、状態ベクトルを

$$a_0|0> + a_1|1> = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (0.6)$$

と書けば

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\hbar\omega & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z \quad (0.7)$$

問2

ハミルトニアンを $H = H_0 + \delta V(x,t)$ とすると、生成消滅演算子の式から

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$$

より、

$$x|0> = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}|1>$$

$$x|1> = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}|0>$$

となるので

$$\delta V(x,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.8)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sigma_x \quad (0.9)$$

となる

問 3

２番のような、x 方向に一様なポテンシャルをかければ—0¿と—1¿を交換する項が現われ、スピンを操作できることがわかります。つまり電場をかければいいのです。磁場だと難しいかな。

4

状態ベクトルについて

$$a_0|00> +a_1|01> +a_2|10> +a_3|11> = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{0.10}$$

と書くものと定義している。そうすると

$$U_{\sqrt{swap}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+i} & \frac{i}{1+i} & 0 \\ 0 & \frac{i}{1+i} & \frac{1}{1+i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.11}$$

$$\tag{0.12}$$

２行２列の行列を考えて Z_i を考えると

$$S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{0.13}$$

$$\exp(-\frac{i\pi S_z}{2}) = \exp(-\frac{\pi}{4})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{0.14}$$

$$\tag{0.15}$$

となっているので、これを４行４列で考えると

$$\bar{Z}_1 = \exp(\frac{i\pi S_z^1}{2}) = \exp(\frac{\pi}{4})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \tag{0.16}$$

$$Z_2 = \exp(-\frac{i\pi S_z^2}{2}) = \exp(-\frac{\pi}{4})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{0.17}$$

この定義をつかってがんばってください
答えは

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

参考文献