# 平成19年度 幾何数理レポート問題

(増田 直紀, 2007年11月8日)

1. 開区間 $I = (-1, 1)$ と $\mathbf{R}^1$ が位相同型であることを示せ。

2. プリントで以前渡した、像、逆像のいくつかの一般的な性質: 写像 $f : X \to Y$, $A, A_1, A_2 \subset X$, $B, B_1, B_2 \subset Y$ について

$$
\begin{array}{ll}
(1.1) & A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2) \\
(1.2) & f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \\
(1.3) & f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \\
(1.4) & f(X - A) \supset f(X) - f(A)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(2.1) & B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \\
(2.2) & f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \\
(2.3) & f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\
(2.4) & f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(3.1) & f^{-1}\left(f\left(A\right)\right) \supset A \\
(3.2) & f\left(f^{-1}\left(B\right)\right) \subset B
\end{array}
$$

   の (3.1), (3.2) を証明せよ。

3. $X$ を距離空間とする。任意の $x \in X$ に対して、1点だけからなる集合 $A = \{x\}$ は $X$ の閉集合であることを示せ。

4. 集合 $X = \{a, b, c, d\}$ に対して、

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, \{d\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$$

   は $X$ の位相であることを示せ。

   また、$X$ の部分集合 $A = \{a, b, c\}$ における $\mathcal{T}$ の相対位相 $\mathcal{T}_A$ を求めよ。

5. 位相同型という関係 $\approx$ は同値関係であることを示せ。

6. 講義の感想。negative なことを書いても悪くしないので、思ったままを書いてほしい。

提出期限は 11/22(木) の幾何数理の授業終了時。事前に出したい人は、1 階の増田のポストに投函。

Email: masuda@mist.i.u-tokyo.ac.jp

レポート問題略解

1. $f : I \to \mathbf{R}^1$

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1+|y|}$$

が位相同型写像となっているので $I \approx \mathbf{R}^1$.

- 他にも $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ など。

2. (3.1): $x \in A$ とする。$f(x) \in f(A)$ より $f^{-1}(f(A)) \supset A$
$x \in f^{-1}(f(A))$. (tautology 風に見えてわかりにくいかもしれないが、自分でも考えてみよう。)

(3.2): $x \in f(f^{-1}(B))$ とする。$\exists y \in f^{-1}(B), \quad f(y) = x$.
一方 $y \in f^{-1}(B)$ より $f(y) \in B$. よって $x \in B$.

- 一般的に、「(集合 $A$) $\subset$ (集合 $B$)」を証明するには、「$x \in A$ なら $x \in B$」を示すのが王道。

3. $\forall y \in X - A = X - \{x\}$ に対して、$N(y, d(x,y)/2) \cap A = \emptyset$.

- $N(y, d(x,y)/2)$ の代わりに $N(y, d(x,y))$ でも (ぎりぎり) よい。
- $\partial A = \{x\} = A$ を示してもよい。

$\mathcal{T}$ が $X$ の位相であることを確かめるには、$\{d\} \cap \{a,d\} = \{d\} \in X$, $\{d\} \cup \{a,d\} = \{a,d\} \in X$ といった関係を全ての要素ペア ($\in X$) について確かめる。

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_A &= \{\emptyset \cap A, \{d\} \cap A, \{a,d\} \cap A, \{a,b,d\} \cap A, \{a,c,d\} \cap A, X \cap A\} \\ &= \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, A\}.\end{aligned}$$

- 定義通りだと 3 個以上の $O_1 \cap O_2 \cap O_3$ なども扱う必要があるが、実は 2 個の $O_1 \cap O_2$ などについてやれば十分。

4. [**反射律** ] 恒等写像 $id : X \to X$ は全単射。また、$id$ も $id^{-1} = id$ も連続。
よって $X \approx X$.

[**対称律** ] $X \approx Y$ とすると、$\exists f : X \to Y$, $f$ が全単射で $f$, $f^{-1}$: 連続。
このとき、$f^{-1}$ も全単射で $f^{-1}$, $(f^{-1})^{-1}$: 連続。よって $Y \approx X$.

[**推移律** ] $X \approx Y$, $Y \approx Z$ とすると、
$\exists f : X \to Y$, $f$ は全単射で $f$, $f^{-1}$: 連続。
$\exists g : Y \to Z$, $g$ は全単射で $g$, $g^{-1}$: 連続。
$\Longrightarrow g \circ f : X \to Z$, $g \circ f$ は全単射で $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$: 連続。よって $X \approx Z$.