信号処理論第二

小野順貴教員

2007/02/09

1. 以下の語句を説明せよ．必要な場合には数式や図を適切に用いること．
   (a) δ 関数
   (b) エルゴード性
   (c) 確率密度関数の特性関数
   (d) 最小位相関数
   (e) カルマンフィルタ
2. j を虚数単位とするとき, 以下の問いに答えよ．
   (a) 以下の積分を求めよ．ただし右辺の極限は, 超関数に基づく一般化された極限であるとする．
   $$\int_0^\infty \sin\omega t d\omega = \lim_{\Omega\to\infty}\int_0^\Omega \sin\omega t d\omega \tag{1}$$
   (b) $H(\omega)$ を
   $$H(\omega) = \begin{cases} -j & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega = 0) \\ j & (\omega < 0) \end{cases} \tag{2}$$
   と定義するとき, $H(\omega)$ の逆 Fourier 変換
   $$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty H(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{3}$$
   を求めよ．ただし, 導出過程も記すこと．導出の際は (a) の結果を用いてもよい．
   (c) (b) で求めた $h(t)$ を用いて $f(t)$ に対し,
   $$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^\infty f(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{4}$$
   の様に定義される変換を何と呼ぶか答えよ．また, 実信号 $f(t)$ に対し,
   $$z(t) = f(t) + j\tilde{f}(t) \tag{5}$$
   で定義される複素信号 $z(t)$ の性質を述べよ．
3. $x(t)$ を実数値をとる定常過程とし, $x(t)$ の自己相関関数を $R_{xx}(\tau)$ と表すとき, 以下の問いに答えよ．
   (a) 任意の τ に対して,
   $$|R_{xx}(\tau)| \le R_{xx}(0) \tag{6}$$
   が成り立つことを示せ．

(b) $x(t)$ のパワースペクトル $S(\omega)$ を, 有限の観測時間 $[-T, T]$ から推定するための式を 1 つ示せ.

(c) 以下で与えられるような自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ をもつ定常過程 $x(t)$ は存在するか? 存在する場合には例を 1 つ挙げよ. 存在しない場合には, その理由を示せ.

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} 1 & (|\tau| \leq 1) \\ 0 & (|\tau| > 1) \end{cases} \tag{7}$$

4. 信号 $s(t)$ に雑音 $n(t)$ が重畳した $x(t) = s(t) + n(t)$ が観測信号として得られるものとする. ただし $s(t)$ と $n(t)$ は実数値をとる, 互いに無相関な定常過程であり, それぞれのパワースペクトルは,

$$S_{ss}(\omega) = \frac{A^2}{\omega^2 + \omega_0^2},\ S_{nn}(\omega) = N^2 \tag{8}$$

であるものとする. いま, 観測信号に対する線形フィルタリング

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{9}$$

により $s(t)$ の推定値 $\hat{s}(t)$ を得るとき, 誤差の二乗平均 $J = E[(s(t) - \hat{s}(t))^2]$ を最小とするような線形フィルタ $h(t)$ を Wiener Filter と呼ぶ. これに関して, 以下の問いに答えよ.

(a) J を最小とする $\hat{s}(t)$ は

$$E[(s(t) - \hat{s}(t))x(t-\tau)] = 0 \tag{10}$$

を満たす. これを直交原理と呼ぶ. 式 (10) を用いて, $h(t)$ が満たすべき以下の Wiener-Hopf の積分方程式を導け.

$$R_{sx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{11}$$

ただし, $R_{sx}(\tau) = E[s(t+\tau)x(t)],\ R_{xx}(\tau) = E[x(t+\tau)x(t)]$ である.

(b) $h(t)$ に非因果的なフィルタを許すものとして, 式 (11) の Fourier 変換により $h(t)$ の周波数応答を求めよ.

(c) $h(t)$ に因果性, すなわち,

$$h(t) = 0 (t < 0) \tag{12}$$

の条件を課すものとして, $h(t)$ の周波数応答を求めよ.