解析数理工学

2001/7/17

1. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を任意の測度空間とし, $A_n (n = 1, 2, \cdots)$ を σ-加法族 $\mathcal{F}$ の元とする. このとき, 次のことを証明せよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0$$

2. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を任意の測度空間とし, その上で定義された二つの実関数 $f, g : X \longrightarrow \mathbf{R}$ が与えられ, どちらも σ-加法族 $\mathbf{F}$ に関して可測で積分可能とする. このとき, 次のことを証明せよ.

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \int_A g(x) d\mu(x) (\forall A \in \mathbf{F}) \Rightarrow \mu(\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

3. 次の問いに答えよ.

(a) 任意の正数 λ に対し

$$\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}) = 1$$

(b) ルベーグの積分論を用いて, 上の (a) より次のことを示せ.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda} k \frac{\lambda^k}{k!}) = \lambda$$

4. 次のことを証明せよ.

(a) 任意の正数 t に対し

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)} \mu(dx) = 1$$

(b) 任意の有界な連続関数 $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbf{R}} \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)} f(x) \mu(dx) = f(0)$$

ここで, μ は直線 $\mathbf{R}$ 上のルベーグ測度である.