数学及力学演習 I

丸山勲教員

2006/03/06

- 参考書, ノート類の持込は不可とする.
- 問題用紙は 1 枚 (表裏), 解答用紙は 4 枚, 計算用紙は 1 枚. 各問につき 1 枚の解答用紙を用いること.
- 問題の設定が不十分, または不適当と思う場合はその旨を明記し, 合理的な設定をした上で回答せよ.

1. 以下の小問について, 略解と共に解答を, 解答用紙 1 に記せ.
   (a) $y' - 2y + y^2 = 0$ を解け.
   (b) $y'' - 2y' + y = e^x$ を解け.
   (c) 以下の三つの常微分方程式の内, 一つを解け. 解答にどれを選んだか明記すること.
      i. $y = xy' - \dfrac{1}{y}$
      ii. $y = xy' - \dfrac{1}{y'}$
      iii. $y = xy' - x^2 + y^2$
   (d) $\boldsymbol{A} = {}^t(x^3, y^2, z)$ とするとき $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ. (S は半径 1 の球の表面とし, ベクトル面積素は外向き法線方向.)
   (e) 三次元ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ に関する汎関数 $J[\boldsymbol{r}] = \displaystyle\int dt (\frac{1}{2} m |\dot{\boldsymbol{r}}|^2 - V(\boldsymbol{r}, t))$ のオイラー方程式を書き下せ.
   (f) 四次元時空のスカラー場 $\phi(t, x, y, z)$ に関する汎関数 $J[\phi] = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int dtdV \{(\nabla\phi) \cdot (\nabla\phi) - (\dot{\phi})^2\}$ のオイラー方程式を書き下せ.

2. (a) 上向きを z 軸とした時, 断面積が $A(z) = Az^2$ となる漏斗状のフラスコに水が満杯に入っている. (A は定数) 液面の高さ $z = z(t) > 0$ とした時,
   $$A(z)dz = -\alpha\sqrt{z}dt$$
   という微分方程式に従うとする. そこで, 時刻 $t = 0$ で $z(0) = h$ として, 水が無くなる時刻 T を求めよ. また, 液面の高さ z を縦軸, 時刻 t を横軸にして図に示せ.
   (b) 以下の微分方程式の固定点 (平衡点) の安定性を調べ, 図示せよ.
   $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$
   (c) 級数解の方法を用いて, $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ の $x = 0$ 近傍での二つの独立解を求めよ.
   (d) $y = y(t) \in \mathbf{R}$ に関する次の強制振動の微分方程式を考えよう. $\omega, \omega_0 > 0$ とする.
   $$\ddot{y} + \omega^2 y = A\cos\omega_0 t \tag{1}$$

i. $A=0$ の時の一般解 (斉次解) を求めよ.

ii. $z=z(t)\in(C)$ が次の微分方程式

$$\ddot{z}+\omega^2 z=Ae^{i\omega_0 t}$$

の解である時, $y=\mathrm{Re}[z(t)]$ は強制振動の微分方程式 (1) を満たすことを示せ.

iii. 強制振動の一般解 $y(t)$ を求めよ. ここで, $\omega=\omega_0, \omega\neq\omega_0$ の場合分けに注意せよ.

(e) 級数解の方法を用いて, $x^2y''-xy'+y=0$ の $x=1$ 近傍での二つの独立解を求めよ. この時, 漸化式の解法は詳しく説明すること.

3. (a) 三次元極座標 (r,θ,ϕ) から作る直交曲線座標系を考える. [*1] その基底ベクトル $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\phi$ を書き下せ. 途中式は略してよい.

(b) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_r$ としたとき, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ を求めよ.

(c) 関数 $y=y(\theta)\in\mathbf{R}$ について, ラプラシアンを作用させた $\Delta y(\theta)$ を書き下せ.

(d) 微分方程式 $\Delta(\theta)=-\dfrac{l(l+1)}{r^2}y(\theta)$ は, $r\neq 0$ とし $x=\cos\theta$ と変換すると, Legendre 方程式

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$$

となることを示せ.

(e) Legendre 方程式の全ての特異点を挙げ, 確定特異点, 不確定特異点のいずれであるか示せ.

(f) $l=0,1,2,\cdots$ の場合には解は多項式となることが知られている. $l=1$ の場合にこれを求めよ.

(g) 上の $l=1$ の解 $y(x)$ を規格化せよ. 具体的には, θ の表示に戻し, $\displaystyle\int_S y_l(\theta)^2 dS=1$ となるように未知定数を決定せよ. (S は半径 1 の球の表面とする. $dS=|d\boldsymbol{S}|$ である)

4. (a) 二次元上の各点で速度が $v(x,y)$ と与えられるとき, 曲線 $y=y(x)$ に沿って進む時間は $T=\displaystyle\int dt=\int dx\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(x,y)}$ となる. これを示せ.

(b) 時刻 $t=0$ において原点に静止している質量 m の物質が曲線 $y=y(x)$ 上を摩擦なく滑り落ちるとき $v=\sqrt{2gx}$ となる. ここで, x 軸を下向き, y 軸を右向きとした. この時, 落下時間の極値を与える曲線がサイクロイド

$$\begin{cases} x=A(1-\cos\theta) \\ y=A(\theta-\sin\theta) \end{cases}$$

となることを示せ. (この曲線がオイラー方程式を満たすことを示してもよい.) ここで A は積分定数, θ は曲線の媒介変数である.

(c) 幾何光学において, xy 平面の 2 点 P_1,P_2 を進む光の経路 $y(x)$ は, 2 点間を進むのにかかる時間が極小になるような経路になる (フェルマーの原理). ここで光速 $v=v(y)$ が $v(y)=v_0(1-\alpha y)$ と書ける場合を考えよう $(\alpha>0)$. この時, 原点で傾きが負の微小量を持つ光の経路 $y=y(x), y(0)=0, y'(0)=-\delta, \delta>0$ は, x を増加させていくと上下どちら向きに曲がるか? オイラー方程式を用いて説明せよ. $|\alpha y|\ll 1$ という近似を使ってもよい. [*2]

[*1] $\boldsymbol{r}={}^t(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$

[*2] これは逃げ水などの下方蜃気楼と呼ばれる物理現象に対応する.