数学 2D

藤堂眞治教員

2008/07/23

- 参考書・ノート類の持ち込み不可.
- 解答用紙 3 枚, 計算用紙 1 枚. 原則として各問につき 1 枚の解答用紙を用いること. (裏面を用いてもよい) それぞれの解答用紙に学生証番号・氏名・問題番号を明記せよ.
- 問題の設定が不十分または不適当と思う場合は, その旨を明記し合理的な設定をした上で解答せよ.

1. (a) 関数 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ について, 以下の問いに答えよ.
   i. $u(x,y)$ が二次元 Laplace 方程式 $\nabla^2 u = 0$ を満たすことを示せ.
   ii. $u(x,y)$ が全複素平面 C 上で正則な複素関数 f の実部である時, Cauchy-Riemann の関係式を用いて f の虚部 $v(x,y)$ を求めよ.
   iii. $f = u(x,y) + iv(x,y)$ を $z = x + iy$ と $\overline{z} = x - iy$ を用いて表せ.

   (b) 複素関数 $\dfrac{3z}{(z-2)(z+4)}$ について以下の問いに答えよ.
   i. 複素平面 C 上の全ての特異点とその留数を求めよ.
   ii. $f(z)$ の Maclaulin 展開 ($z = 0$ を中心とする Taylor 展開) を求めよ.
   iii. $z = 0$ を中心とする Laurant 展開のうち, $|z| = 3$ の円周上で収束するものを求めよ.
   iv. $z = 0$ を中心とする Laurant 展開のうち, 絶対値の十分に大きな z に対して収束するものを求めよ. さらに無限遠点 ∞ における留数を求めよ.

2. (a) $|z| \to \infty$ のとき一様に $|g(z)| \to 0$ であるならば, 下に示す半円 C 上の複素積分 $I_R = \displaystyle\int_C g(z)e^{iaz}dz (a > 0)$ が $R \to \infty$ で 0 となることを証明せよ.

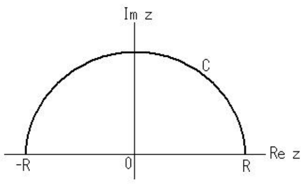

図 1

   (b) 以下の積分を複素積分を用いて求めよ. 積分路など計算の詳細も示せ.
   i. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$ $(-1 < a < 1)$
   ii. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x - i0}dx$ $(t \in \mathbf{R}, t \neq 0)$
   iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

iv. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - ix}$ (Cauchy の主値を求めよ)

3. (a) Cauchy の積分定理を用いて, Gaussian:$g(x) = e^{-ax^2}$(a は正の実数) の Fourier 変換を求めよ.

(b) 関数 $f(x), g(x)$ とそれらの Fourier 変換 $\hat{f}(k), \hat{g}(k)$ について, たたみこみの定理

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\hat{g}(k)e^{ikx}dk$$

が成り立つことを示せ.

(c) $u = u(x,t)$ に関する 1 次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を初期条件 $u(x,0) = v(x)$ のもとで解くことを考える.

i. $u(x,t)$ の x に関する Fourier 変換を $\hat{u}(k,t)$ とする. 微分方程式の両編に e^{-ikx} を乗じて x に関して積分することにより, $\hat{u}(k,t)$ の t に関する 1 階常微分方程式を導け.

ii. 前問の方程式を解いて逆 Fourier 変換を行うことにより, 初期条件を満たす解が

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(k)h(k,t)e^{ikx}dk$$

の形で与えられることを示せ. また $h(k,t)$ の具体的な形を示せ.

iii. 前問の解をたたみこみの定理と比較し, さらに (a) の結果を用いることにより, Gaussian の重ね合わせの形で表現せよ.