応用空間論

駒木文保教員

2009/07/21

以下の問 1-問 4 に答えよ.

問 1.

1. $x+y+z=u$，$y+z=uv$，$z=uvw$ のとき，$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ を u，v，w を用いて表せ.
2. 完全微分形式でない閉微分形式の例を挙げよ.

問 2. 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の曲面 $z=2(x)^2+(y)^2$ を考える.[*1]曲面の座標系を $(u^1,u^2)=(x,y)$ ととる．曲面上の計量テンソル場の座標系 (u^1,u^2) に対する成分 $g_{ij}(u)$ $(i,j=1,2)$ を求めよ.

問 3. n 次元多様体の 2 つの（局所）座標系 $x=(x^i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$y=(y^{i'})$ $(i'=1,2,\cdots n)$ に対する接続の係数をそれぞれ Γ^k_{ij}，$\Gamma^{k'}_{i'j'}$ とすると，

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=A^{k'}_j\partial_{i'}A^j_{j'}+A^i_{i'}A^j_{j'}A^{k'}_k\Gamma^k_{ij} \tag{1}$$

が成立する．ただし，$A^i_{i'}=\partial x^i/\partial y^{i'}$，$A^{i'}_i=\partial y^{i'}/\partial x^i$ である.

1. $A^{j'}_j\partial_{i'}A^j_{k'}=-A^j_{k'}\partial_{i'}A^{j'}_j$ を示せ.
2. X^i が多様体上の（反変）ベクトル場であるとき，

   $$\partial_i X^j+X^k\Gamma^j_{ik} \tag{2}$$

   は $(1,1)$-テンソル場であることを示せ.

問 4.

1. 正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ のモデル多様体の座標系として (μ,σ) をとる．Fisher 計量（Fisher-Rao 計量）の，座標系 (μ,σ) に関する成分 $g_{\mu\mu}$，$g_{\mu\sigma}$，$g_{\sigma\mu}$，$g_{\sigma\sigma}$ を求めよ.
2. 正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ のモデル多様体上の座標系 (μ,σ) に関する Riemann 接続（Levi-Civita 接続）の係数のうち，$\Gamma^\mu_{\mu\mu}$，$\Gamma^\sigma_{\mu\mu}$ を求めよ．ベクトル場 $\partial/\partial\mu$ の Riemann 接続による共変微分：

   $$\nabla_{\partial/\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\mu} \tag{3}$$

   を求めよ.[*2]

[*1] $(x)^2$，$(y)^2$ はそれぞれ x，y の 2 乗.

[*2] Riemann 接続の係数：$\Gamma^k_{ij}=(\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{li}-\partial_l g_{ij})g^{lk}/2$.