

数値解析 レポート第1回 ヒント

物工 あおんと (青木 尚登)

平成 19 年 12 月 13 日

まえがき ちょっとしたヒントです。気合にムラがあるのはご愛嬌で ^^。

E-mail:aont@msn.com mixi:5136197

あ、シケタイの人連絡してくれるとありがたいです m(. _.)m

第 1 問 10/25 に配布されたプリントにある LU 分解のアルゴリズムを参照し、3 重対角行列である事 ($|i - j| > 1$ のとき、 $a_{i,j} = 0$) を利用して、いらぬ部分を削る。枢軸選択はしなくて良いとあるので、 $|a_{i,k}|$ を最大にする...とか、何々を交換とか、 p とかが関わっているところを消去。

注意:このアルゴリズムを実行すると A は LU 分解形に書き換えられる。LU 分解形とは、上三角が U であり、下三角が L となっているものことである。対角成分は U のものとなっている。(L の対角成分は 1 とわかっている。)

解くアルゴリズムは A の LU 分解形もなお 3 重対角行列になっている事を利用して前進消去と交代代入を書く。

計算量の求め方は、

for i := 1 to n { 処理 (計算量 $f(i)$) }

という処理の計算量 $\sum_{i=1}^n f(i)$ となる事を用いる。今回は f は定数ですが、計算量は数では求まりません。オーダーで表現しましょう。

第 2 問 Scilab とか使ってください。cond(A) で A の条件数が出ます。手計算は...わかりません 汗

第 3 問 「 A が正定値 $\Leftrightarrow A$ のすべての主小行列式が正」を用いる。CG 法のアルゴリズムは 11/9 配布プリントに書いてあります。CG 法って収束速いですね。びっくりしました ^^;

第 4 問 $\mathbf{x}^{(0)}$ をランダムに定めて $\mathbf{y}^{(k+1)} = A\mathbf{x}^{(k)}$, $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k+1)} / \|\mathbf{y}^{(k+1)}\|$ を十分な回数繰り返したとき、 $\max \lambda \cong \frac{\mathbf{y}^{(n+1)T} \mathbf{y}^{(n+1)}}{\mathbf{y}^{(n+1)T} \mathbf{x}^{(n)}}$ となる。 A_2 の方が収束が遅いのは、最大固有値に対する、各固有値の大きさが、 A_1 に比べて大きいから。

第 5 問 (1)(i) シュミットの直交化を使えばできるはず。参考までに (wikipedia からパクリ w)

$$w'_n = v_n - \sum_{i=0}^{n-1} (w_i, v_n) w_i \quad w_n = (w'_n, w'_n)^{-\frac{1}{2}} w'_n$$

(ii) \mathbf{a} を \mathbf{q} の線形結合であらわしてあげて、無理やり $\mathbf{a} = Q\mathbf{r}$ みたいに書き換えてあげましょう。その式をまとめれば $A = QR$ になります。

(2) Hessenberg 形行列 A を QR 分解すると、 Q が Hessenberg 形となり、さらに RQ も Hessenberg 形となる事を示せばよい。 Q が Hessenberg 形となる事の証明は、 \mathbf{q}_j が $\mathbf{a}_i (i = 1..j)$ の線形結合となる事を用いる。 RQ は R が上三角、 Q が Hessenberg 形となる事をもちいる。