

幾何数理工学

川端教員

1998/07/22

以下の問題に解答しなさい。ただし、問題 1 は必須回答とします。丸括弧の中は配点の目安です。従って全問に回答する必要はありません。

- (3次元ユークリッド)空間において、 π を原点 O を通り単位法線ベクトル n を持つ平面とする。また、 a, b を位置ベクトルとする。以下の問いに答えなさい。ただし、向きを考えるために座標系は一つ固定する。(30)
 - a の π による鏡像を表す位置ベクトル a' を求めよ。
 - 外積 $a \times b$ の随伴ベクトル c を O を始点とする位置ベクトルと考える。 b と c についても、それらの π による鏡像を表すベクトルを考えそれぞれ b' および c' と表す。次に外積 $a' \times b'$ の随伴ベクトルを c'' とする。さてこのとき、 c' と c'' はどのような関係にあるか、理由とともに答えなさい。
- 3次元の回転 $\nabla \times$ について、その極座標 (r, θ, ψ) 表示を求めよ。*1(35)
- n 次元アフィン空間における反変 n 階共変 n 階テンソル $P_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_n}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ について、関係式

$$P_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_n}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} = n! P_{[12 \dots n]}^{[12 \dots n]}$$

が成立することを証明しなさい。左辺は交代化の後、縮約することを意味する。(35)

- 4次元アフィン空間における反変 2-ベクトル $f^{\kappa_1 \kappa_2}$ について以下の問いに答えなさい。ただし指標は $\{1, 2, 3, 4\}$ の上を走るものとする。(35)
 - $f^{\kappa_1 \kappa_2}$ の独立成分はいくつあるか?
 - 座標系 (κ) から (κ') へのアフィン変換 (アフィン係数を $A_{\kappa}^{\kappa'}, \Delta = \det(A_{\kappa}^{\kappa'})$ と表記) により $f^{[\kappa_1 \kappa_2] f^{\kappa_3 \kappa_4]}$ はどう変換されるか。
 - 特に、 $f^{\kappa_1 \kappa_2}$ が (κ) 系において $f^{\kappa_1 \kappa_2} = (\kappa_2 - \kappa_1)^3$ と表されるとき、 $f^{[\kappa_1 \kappa_2] f^{\kappa_3 \kappa_4]}$ をもっと具体的に書き表しなさい。
- 正方行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ に対して、 $[A, B] = AB - BA$ と定義する。 E は単位行列を表すものとする。また実数 t に対して

$$\exp(tA) = E + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

と定義する。以下の問いに答えなさい。(35)

- 関係式

$$\exp(tA) \exp(tB) \exp(-tA) \exp(-tB) = \exp(t^2[A, B] + O(t^3))$$

を証明せよ。

*1 参考: $(x_1, x_2, x_3) = (r \sin \theta \cos \psi, r \sin \theta \sin \psi, r \cos \theta)$, 回転は rot あるいは curl と書く。

(b) 上の関係式を幾何学的に解釈せよ. ^{*2}

^{*2} ヒント: $\exp(tA)$ は時刻零における初期ベクトルを微分方程式 $\frac{dx}{dt} = Ax$ に従って発展させる作用素である.